BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN 9

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHAN ĐỨC CHÍNH (Tổng Chủ biên)
TÔN THÂN (Chủ biên)
VŨ HỮU BÌNH – TRẦN PHƯƠNG DUNG – NGÔ HỮU DŨNG
LÊ VĂN HỒNG – NGUYỄN HỮU THẢO

TOÁN 9

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - HOÀNG XUÂN VINH**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN THỊ THANH**
Biên tập kĩ thuật và trình bày : **NGUYỄN THANH THUÝ**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN THỊ THANH**
Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

TOÁN 9 - TẬP MỘT
Mã số : 2H901T1
In 30.000 bản (QĐ 01GK), khổ 17 x 24cm.
In tại Công ty cổ phần in Sách giáo khoa tại TP - Hà Nội.
Số xuất bản: 01-2011/CXB/89-1235/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 01 năm 2011.

Phần ĐẠI SỐ

Chương I – CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

§1. Căn bậc hai

Phép toán ngược của phép bình phương là phép toán nào ?

1. Căn bậc hai số học

Ở lớp 7, ta đã biết :

• Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

• Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau : Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

• Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.

?1 *Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau :*

a) 9 ; *b)* $\frac{4}{9}$; *c)* 0,25 ; *d)* 2.

ĐỊNH NGHĨA

> *Với số dương* a, *số* $\sqrt{a}$ *được gọi là* ***căn bậc hai số học*** *của* a.
> *Số* 0 *cũng được gọi là căn bậc hai số học của* 0.

Ví dụ 1. Căn bậc hai số học của 16 là $\sqrt{16}$ (= 4).

Căn bậc hai số học của 5 là $\sqrt{5}$.

➢ ***Chú ý.*** *Với* $a \ge 0$, *ta có :*

Nếu $x = \sqrt{a}$ *thì* $x \ge 0$ *và* $x^2 = a$;

Nếu $x \ge 0$ *và* $x^2 = a$ *thì* $x = \sqrt{a}$.

Ta viết

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = a. \end{cases}$$

?2 *Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau :*

a) 49 ; *b)* 64 ; *c)* 81 ; *d)* 1,21.

Giải mẫu

$\sqrt{49} = 7$, vì $7 \geq 0$ và $7^2 = 49$.

Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm gọi là *phép khai phương* (gọi tắt là khai phương). Để khai phương một số, người ta có thể dùng máy tính bỏ túi hoặc dùng bảng số (xem §5).

Khi biết căn bậc hai số học của một số, ta dễ dàng xác định được các căn bậc hai của nó. Chẳng hạn, căn bậc hai số học của 49 là 7 nên 49 có hai căn bậc hai là 7 và −7.

?3 *Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau :*

a) 64 ; *b)* 81 ; *c)* 1,21.

2. So sánh các căn bậc hai số học

Ta đã biết :

Với hai số a và b không âm, nếu a < b thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ta có thể chứng minh được :

Với hai số a và b không âm, nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì a < b.

Như vậy ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Với hai số a *và* b *không âm, ta có*

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

Ví dụ 2. So sánh

a) 1 và $\sqrt{2}$; b) 2 và $\sqrt{5}$.

Giải

a) $1 < 2$ nên $\sqrt{1} < \sqrt{2}$. Vậy $1 < \sqrt{2}$.

b) $4 < 5$ nên $\sqrt{4} < \sqrt{5}$. Vậy $2 < \sqrt{5}$.

?4 *So sánh*

a) 4 *và* $\sqrt{15}$; *b)* $\sqrt{11}$ *và* 3.

Ví dụ 3. Tìm số x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} > 2$; b) $\sqrt{x} < 1$.

Giải

a) $2 = \sqrt{4}$, nên $\sqrt{x} > 2$ có nghĩa là $\sqrt{x} > \sqrt{4}$.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} > \sqrt{4} \Leftrightarrow x > 4$. Vậy $x > 4$.

b) $1 = \sqrt{1}$, nên $\sqrt{x} < 1$ có nghĩa là $\sqrt{x} < \sqrt{1}$.

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} < \sqrt{1} \Leftrightarrow x < 1$. Vậy $0 \leq x < 1$.

?5 *Tìm số* x *không âm, biết :*

a) $\sqrt{x} > 1$; *b)* $\sqrt{x} < 3$.

Bài tập

1. Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng :

121 ; 144 ; 169 ; 225 ; 256 ; 324 ; 361 ; 400.

2. So sánh

a) 2 và $\sqrt{3}$; b) 6 và $\sqrt{41}$; c) 7 và $\sqrt{47}$.

3. Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) :

a) $x^2 = 2$; b) $x^2 = 3$;

c) $x^2 = 3{,}5$; d) $x^2 = 4{,}12$.

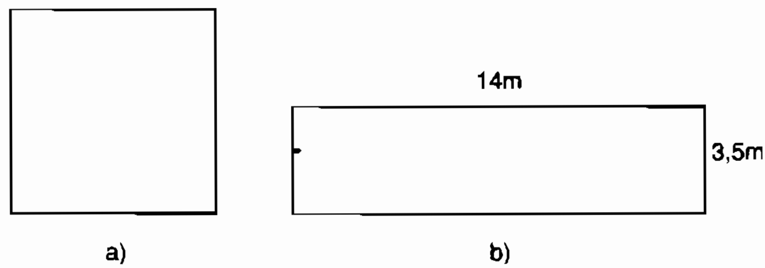
Hướng dẫn. Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ (với $a \geq 0$) là các căn bậc hai của a.

4. Tìm số x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} = 15$; b) $2\sqrt{x} = 14$;

c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$; d) $\sqrt{2x} < 4$.

5. ***Đố.*** Tính cạnh một hình vuông, biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3,5m và chiều dài 14m (h.1).



Hình 1

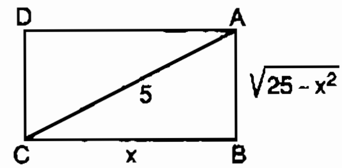
Có thể em chưa biết

Từ thời xa xưa, người ta đã thấy giữa Hình học và Đại số có mối liên quan mật thiết. Khái niệm căn bậc hai cũng có phần xuất phát từ Hình học. Khi biết độ dài cạnh hình vuông, ta tính được diện tích hình đó bằng cách bình phương (hay nâng lên luỹ thừa bậc hai) độ dài cạnh. Ngược lại, nếu biết diện tích hình vuông, ta tìm được độ dài cạnh của nó nhờ khai phương số đo diện tích. Người ta coi phép lấy căn bậc hai số học là phép toán ngược của phép bình phương và coi việc tìm căn một số là tìm "cái gốc, cái nguồn". Điều này hiện còn thấy trong ngôn ngữ một số nước. Chẳng hạn, ở tiếng Anh, từ *square* có nghĩa là *hình vuông* và cũng có nghĩa là *bình phương*, từ *root* có nghĩa là rễ, là nguồn gốc, còn từ *square root* là *căn bậc hai.*

§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1. Căn thức bậc hai

?1 *Hình chữ nhật* ABCD *có đường chéo* AC = 5 *cm và cạnh* BC = x *(cm) thì cạnh* AB = $\sqrt{25 - x^2}$ *(cm). Vì sao ? (h.2).*



Hình 2

Người ta gọi $\sqrt{25 - x^2}$ là căn thức bậc hai của $25 - x^2$, còn $25 - x^2$ là biểu thức lấy căn.

Một cách tổng quát :

Với A *là một biểu thức đại số, người ta gọi* $\sqrt{A}$ *là* ***căn thức bậc hai*** *của* A, *còn* A *được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.*

$\sqrt{A}$ *xác định (hay có nghĩa) khi* A *lấy giá trị không âm.*

Ví dụ 1. $\sqrt{3x}$ là căn thức bậc hai của 3x ; $\sqrt{3x}$ xác định khi $3x \geq 0$, tức là khi $x \geq 0$. Chẳng hạn, với x = 2 thì $\sqrt{3x}$ lấy giá trị $\sqrt{6}$; với x = 12 thì $\sqrt{3x}$ lấy giá trị $\sqrt{36} = 6$.

?2 *Với giá trị nào của* x *thì* $\sqrt{5 - 2x}$ *xác định ?*

2. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

?3 *Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau :*

a	−2	−1	0	2	3
a^2					
$\sqrt{a^2}$					

ĐỊNH LÍ

> *Với mọi số* a, *ta có* $\sqrt{a^2} = |a|$.

Chứng minh

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối thì $|a| \geq 0$.

Ta thấy :

Nếu $a \geq 0$ thì $|a| = a$, nên $(|a|)^2 = a^2$;

Nếu $a < 0$ thì $|a| = -a$, nên $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$.

Do đó, $(|a|)^2 = a^2$ với mọi số a.

Vậy $|a|$ chính là căn bậc hai số học của a^2, tức là $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{12^2}$; b) $\sqrt{(-7)^2}$.

Giải

a) $\sqrt{12^2} = |12| = 12$.

b) $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$.

Ví dụ 3. Rút gọn

a) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$; b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.

Giải

a) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$ (vì $\sqrt{2} > 1$).

Vậy $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$.

b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ (vì $\sqrt{5} > 2$).

Vậy $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}-2$.

➢ ***Chú ý.*** *Một cách tổng quát, với A là một biểu thức ta có* $\sqrt{A^2} = |A|$, *có nghĩa là :*

$\sqrt{A^2} = A$ *nếu* $A \geq 0$ (tức là A lấy giá trị không âm) ;

$\sqrt{A^2} = -A$ *nếu* $A < 0$ (tức là A lấy giá trị âm).

Ví dụ 4. Rút gọn

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$; b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.

Giải

a) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ (vì $x \geq 2$).

b) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3|$.

Vì $a < 0$ nên $a^3 < 0$, do đó $|a^3| = -a^3$.

Vậy $\sqrt{a^6} = -a^3$ (với $a < 0$).

Bài tập

6. Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$; b) $\sqrt{-5a}$; c) $\sqrt{4-a}$; d) $\sqrt{3a+7}$?

7. Tính

a) $\sqrt{(0,1)^2}$; b) $\sqrt{(-0,3)^2}$; c) $-\sqrt{(-1,3)^2}$; d) $-0,4\sqrt{(-0,4)^2}$.

8. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$; b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$;

c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$; d) $3\sqrt{(a-2)^2}$ với $a < 2$.

9. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{x^2} = 7$; b) $\sqrt{x^2} = |-8|$;

c) $\sqrt{4x^2} = 6$; d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.

10. Chứng minh

a) $(\sqrt{3}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.

Luyện tập

11. Tính

a) $\sqrt{16}.\sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$; b) $36 : \sqrt{2.3^2.18} - \sqrt{169}$;

c) $\sqrt{\sqrt{81}}$; d) $\sqrt{3^2+4^2}$.

12. Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{2x+7}$; b) $\sqrt{-3x+4}$; c) $\sqrt{\dfrac{1}{-1+x}}$; d) $\sqrt{1+x^2}$.

13. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$; b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$; d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$.

14. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 3$; b) $x^2 - 6$;

c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$; d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.

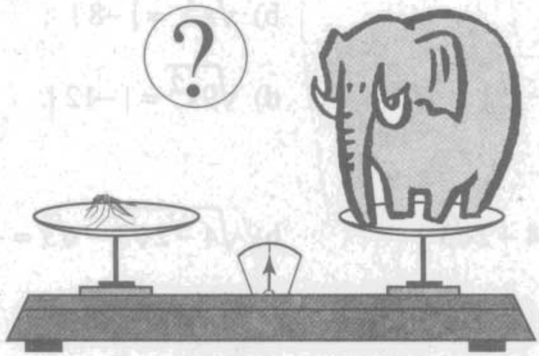
Hướng dẫn. Dùng kết quả :

Với $a \geq 0$ thì $a = (\sqrt{a})^2$.

15. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 5 = 0$; b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.

16. ***Đố.*** Hãy tìm chỗ sai trong phép chứng minh "Con muỗi nặng bằng con voi" dưới đây.



Giả sử con muỗi nặng m (gam), còn con voi nặng V (gam). Ta có

$$m^2 + V^2 = V^2 + m^2.$$

Cộng cả hai vế với $-2mV$, ta có

$$m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2,$$

hay $$(m - V)^2 = (V - m)^2.$$

Lấy căn bậc hai mỗi vế của đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt{(m - V)^2} = \sqrt{(V - m)^2}.$$

Do đó $$m - V = V - m.$$

Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi (!).

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

1. Định lí

?1 *Tính và so sánh :* $\sqrt{16 \,.\, 25}$ *và* $\sqrt{16}.\sqrt{25}$.

ĐỊNH LÍ

> *Với hai số* a *và* b *không âm, ta có*
>
> $$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.$$

Chứng minh. Vì $a \geq 0$ và $b \geq 0$ nên $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ xác định và không âm.

Ta có $(\sqrt{a}.\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2 = a.b$.

Vậy $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ là căn bậc hai số học của a.b, tức là $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$.

➤ ***Chú ý.*** *Định lí trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm.*

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một tích

> *Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.*

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính :

a) $\sqrt{49.1,44.25}$; b) $\sqrt{810.40}$.

Giải

a) $\sqrt{49.1,44.25} = \sqrt{49}.\sqrt{1,44}.\sqrt{25} = 7.1,2.5 = 42$.

b) $\sqrt{810.40} = \sqrt{81.4.100} = \sqrt{81}.\sqrt{4}.\sqrt{100} = 9.2.10 = 180$.

?2 *Tính*

a) $\sqrt{0,16.0,64.225}$; *b)* $\sqrt{250.360}$.

b) Quy tắc nhân các căn bậc hai

> *Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.*

Ví dụ 2. Tính

a) $\sqrt{5}.\sqrt{20}$; b) $\sqrt{1,3}.\sqrt{52}.\sqrt{10}$.

Giải

a) $\sqrt{5}.\sqrt{20} = \sqrt{5.20} = \sqrt{100} = 10$.

b) $\sqrt{1,3}.\sqrt{52}.\sqrt{10} = \sqrt{1,3.52.10} = \sqrt{13.52} = \sqrt{13.13.4} = \sqrt{(13.2)^2} = 26$.

?3 *Tính*

a) $\sqrt{3}.\sqrt{75}$;   *b)* $\sqrt{20}.\sqrt{72}.\sqrt{4,9}$.

➤ ***Chú ý.*** *Một cách tổng quát, với hai biểu thức* A *và* B *không âm ta có*

$$\sqrt{A.B} = \sqrt{A}\,.\,\sqrt{B}.$$

Đặc biệt, với biểu thức A *không âm ta có*

$$(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{3a}.\sqrt{27a}$ với $a \geq 0$;   b) $\sqrt{9a^2b^4}$.

Giải

a) $\sqrt{3a}.\sqrt{27a} = \sqrt{3a.27a} = \sqrt{81a^2} = \sqrt{(9a)^2} = |9a| = 9a$ (vì $a \geq 0$).

b) $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{9}.\sqrt{a^2}.\sqrt{b^4} = 3.|a|.\sqrt{(b^2)^2} = 3|a|b^2$.

Ta còn có thể rút gọn như sau : $\sqrt{9a^2b^4} = \sqrt{(3ab^2)^2} = |3ab^2| = 3|a|b^2$.

?4 *Rút gọn các biểu thức sau (với* a *và* b *không âm) :*

a) $\sqrt{3a^3}.\sqrt{12a}$;   *b)* $\sqrt{2a.32ab^2}$.

Bài tập

17. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính

a) $\sqrt{0,09.64}$;   b) $\sqrt{2^4.(-7)^2}$;

c) $\sqrt{12,1.360}$;   d) $\sqrt{2^2.3^4}$.

18. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính

a) $\sqrt{7}.\sqrt{63}$;   b) $\sqrt{2,5}.\sqrt{30}.\sqrt{48}$;

c) $\sqrt{0,4}.\sqrt{6,4}$;   d) $\sqrt{2,7}.\sqrt{5}.\sqrt{1,5}$.

19. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{0,36a^2}$ với $a < 0$;

b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$;

c) $\sqrt{27.48(1-a)^2}$ với $a > 1$;

d) $\dfrac{1}{a-b}.\sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.

20. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\dfrac{2a}{3}}.\sqrt{\dfrac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{13a}.\sqrt{\dfrac{52}{a}}$ với $a > 0$;

c) $\sqrt{5a}.\sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$;

d) $(3-a)^2 - \sqrt{0,2}.\sqrt{180a^2}$.

21. Khai phương tích 12 . 30 . 40 được :

(A) 1200 ; (B) 120 ; (C) 12 ; (D) 240.

Hãy chọn kết quả đúng.

Luyện tập

22. Biến đổi các biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi tính

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$;

b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$;

c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$;

d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

23. Chứng minh

a) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$;

b) $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005})$ và $(\sqrt{2006} + \sqrt{2005})$ là hai số nghịch đảo của nhau.

24. Rút gọn và tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) của các căn thức sau :

a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = -2$, $b = -\sqrt{3}$.

25. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{16x} = 8$; b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$;

c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$; d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

26. a) So sánh $\sqrt{25+9}$ và $\sqrt{25} + \sqrt{9}$;

b) Với a > 0 và b > 0, chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

27. So sánh

a) 4 và $2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{5}$ và -2.

§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

1. Định lí

?1 *Tính và so sánh* $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ *và* $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

ĐỊNH LÍ

> *Với số* a *không âm và số* b *dương, ta có*
>
> $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Chứng minh. Vì a ≥ 0 và b > 0 nên $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ xác định và không âm.

Ta có $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$.

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ là căn bậc hai số học của $\dfrac{a}{b}$, tức là $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2. Áp dụng

a) Quy tắc khai phương một thương

Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, *trong đó số* a *không âm và số* b *dương, ta có thể lần lượt khai phương số* a *và số* b, *rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.*

Ví dụ 1. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$; b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}$.

b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{9}{10}$.

?2 *Tính*

a) $\sqrt{\frac{225}{256}}$; *b)* $\sqrt{0,0196}$.

b) Quy tắc chia hai căn bậc hai

Muốn chia căn bậc hai của số a *không âm cho căn bậc hai của số* b *dương, ta có thể chia số* a *cho số* b *rồi khai phương kết quả đó.*

Ví dụ 2. Tính

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$.

Giải

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4.$

b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{49}{8} : \frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$.

?3 *Tính*

a) $\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

➢ ***Chú ý.*** *Một cách tổng quát, với biểu thức* A *không âm và biểu thức* B *dương, ta có*

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}$; b) $\dfrac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{4}.\sqrt{a^2}}{5} = \dfrac{2}{5}|a|.$

b) $\dfrac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\dfrac{27a}{3a}} = \sqrt{9} = 3$ (với $a > 0$).

?4 *Rút gọn*

a) $\sqrt{\dfrac{2a^2b^4}{50}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ *với* $a \geq 0$.

Bài tập

28. Tính

a) $\sqrt{\dfrac{289}{225}}$; b) $\sqrt{2\dfrac{14}{25}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{0,25}{9}}$; d) $\sqrt{\dfrac{8,1}{1,6}}$.

29. Tính

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; b) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$; d) $\dfrac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3.3^5}}$.

30. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{y}{x}.\sqrt{\dfrac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0,\ y \neq 0$; b) $2y^2.\sqrt{\dfrac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$;

c) $5xy.\sqrt{\dfrac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0,\ y > 0$; d) $0,2x^3y^3.\sqrt{\dfrac{16}{x^4y^8}}$ với $x \neq 0,\ y \neq 0$.

31. a) So sánh $\sqrt{25-16}$ và $\sqrt{25}-\sqrt{16}$;

b) Chứng minh rằng, với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

Luyện tập

32. Tính

a) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}.5\dfrac{4}{9}.0,01}$; b) $\sqrt{1,44.1,21-1,44.0,4}$;

c) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}$; d) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

33. Giải phương trình

a) $\sqrt{2}.x-\sqrt{50}=0$; b) $\sqrt{3}.x+\sqrt{3}=\sqrt{12}+\sqrt{27}$;

c) $\sqrt{3}.x^2-\sqrt{12}=0$; d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{5}}-\sqrt{20}=0$.

34. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $ab^2.\sqrt{\dfrac{3}{a^2b^4}}$ với $a < 0,\ b \neq 0$; b) $\sqrt{\dfrac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$;

c) $\sqrt{\dfrac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1{,}5$ và $b < 0$; d) $(a-b).\sqrt{\dfrac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

35. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$; b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$.

36. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $0{,}01 = \sqrt{0{,}0001}$;

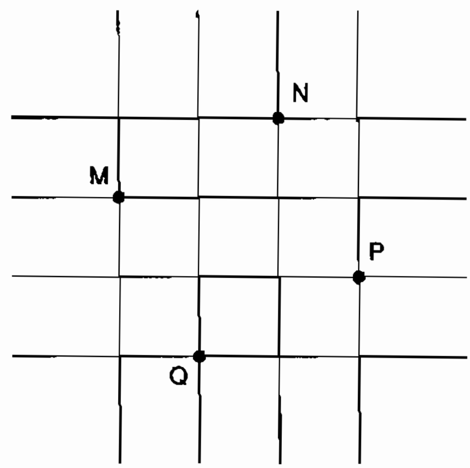
b) $-0{,}5 = \sqrt{-0{,}25}$;

c) $\sqrt{39} < 7$ và $\sqrt{39} > 6$;

d) $(4-\sqrt{13}).2x < \sqrt{3}(4-\sqrt{13})$

$\Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

37. ***Đố.*** Trên lưới ô vuông, mỗi ô vuông cạnh 1cm, cho bốn điểm M, N, P, Q (h.3).
Hãy xác định số đo cạnh, đường chéo và diện tích của tứ giác MNPQ.



Hình 3

§5. Bảng căn bậc hai

Một công cụ tiện lợi để khai phương khi không có máy tính.

Để tìm căn bậc hai của một số dương, người ta có thể sử dụng bảng tính sẵn các căn bậc hai. Trong cuốn "Bảng số với 4 chữ số thập phân" của V.M. Bra-đi-xơ, bảng căn bậc hai là bảng IV dùng để khai căn bậc hai của bất cứ số dương nào có nhiều nhất bốn chữ số.

1. Giới thiệu bảng

Bảng căn bậc hai được chia thành các hàng và các cột. Ta quy ước gọi tên của các hàng (cột) theo số được ghi ở cột đầu tiên (hàng đầu tiên) của mỗi trang. Căn bậc hai của các số được viết bởi không quá ba chữ số từ 1,00 đến 99,9 được ghi sẵn trong bảng ở các cột từ cột **0** đến cột **9**. Tiếp đó là chín cột hiệu chính được dùng để hiệu chính chữ số cuối của căn bậc hai của các số được viết bởi bốn chữ số từ 1,000 đến 99,99.

2. Cách dùng bảng

a) Tìm căn bậc hai của số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100

Ví dụ 1. Tìm $\sqrt{1,68}$.

Tại giao của hàng **1,6** và cột **8**, ta thấy số 1,296. Vậy $\sqrt{1,68} \approx 1,296$ (mẫu 1).

N	...	**8**	...
⋮			
1,6		1,296	
⋮			

Mẫu 1

Ví dụ 2. Tìm $\sqrt{39,18}$.

Tại giao của hàng **39,** và cột **1**, ta thấy số 6,253. Ta có $\sqrt{39,1} \approx 6,253$.

Tại giao của hàng **39,** và cột **8** hiệu chính, ta thấy số 6. Ta dùng số 6 này để hiệu chính chữ số cuối ở số 6,253 như sau :

$$6,253 + 0,006 = 6,259.$$

Vậy $\sqrt{39,18} \approx 6,259$ (mẫu 2).

N	...	**1**	...	**8**	...
⋮					
39,		6,253		6	
⋮					

Mẫu 2

?1 *Tìm*

a) $\sqrt{9,11}$; *b)* $\sqrt{39,82}$.

Bảng tính sẵn căn bậc hai của tác giả V.M. Bra-đi-xơ chỉ cho phép ta tìm trực tiếp căn bậc hai của số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 100. Tuy nhiên, dựa vào tính chất của căn bậc hai, ta vẫn dùng bảng này để tìm được căn bậc hai của số không âm lớn hơn 100 hoặc nhỏ hơn 1.

b) Tìm căn bậc hai của số lớn hơn 100

Ví dụ 3. Tìm $\sqrt{1680}$.

Ta biết $1680 = 16,8 . 100$.

Do đó $\sqrt{1680} = \sqrt{16,8} . \sqrt{100} = 10 . \sqrt{16,8}$.

Tra bảng ta được $\sqrt{16,8} \approx 4,099$. Vậy $\sqrt{1680} \approx 10 . 4,099 = 40,99$.

?2 *Tìm*

a) $\sqrt{911}$; *b)* $\sqrt{988}$.

c) Tìm căn bậc hai của số không âm và nhỏ hơn 1

Ví dụ 4. Tìm $\sqrt{0,00168}$.

Ta biết $0,00168 = 16,8 : 10000$.

Do đó $\sqrt{0,00168} = \sqrt{16,8} : \sqrt{10000} \approx 4,099 : 100 = 0,04099$.

➢ ***Chú ý.*** *Để thực hành nhanh, khi tìm căn bậc hai của số không âm lớn hơn* 100 *hoặc nhỏ hơn* 1, *ta dùng hướng dẫn của bảng : "Khi dời dấu phẩy trong số* N *đi* 2, 4, 6,... *chữ số thì phải dời dấu phẩy theo cùng chiều trong số* $\sqrt{N}$ *đi* 1, 2, 3,... *chữ số" (ví dụ 3 minh hoạ trường hợp dời dấu phẩy ở số* 16,8 *sang phải* 2 *chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số* 4,099 *sang phải* 1 *chữ số ; ví dụ 4 minh hoạ trường hợp dời dấu phẩy ở số* 16,8 *sang trái* 4 *chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số* 4,099 *sang trái* 2 *chữ số).*

?3 *Dùng bảng căn bậc hai, tìm giá trị gần đúng của nghiệm phương trình*

$$x^2 = 0,3982.$$

Bài tập

Dùng bảng số để tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau đây rồi dùng máy tính bỏ túi kiểm tra và so sánh kết quả (từ bài 38 đến bài 40).

38. 5,4 ; 7,2 ; 9,5 ; 31 ; 68.

39. 115 ; 232 ; 571 ; 9691.

40. 0,71 ; 0,03 ; 0,216 ; 0,811 ; 0,0012 ; 0,000315.

41. Biết $\sqrt{9,119} \approx 3,019$. Hãy tính

$\sqrt{911,9}$; $\sqrt{91190}$; $\sqrt{0,09119}$; $\sqrt{0,0009119}$.

42. Dùng bảng căn bậc hai để tìm giá trị gần đúng của nghiệm mỗi phương trình sau :

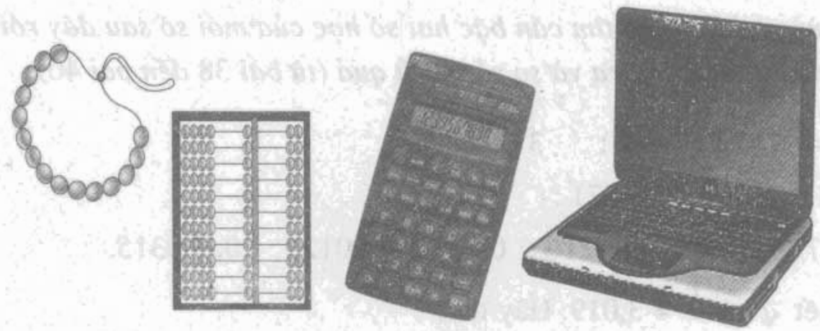
a) $x^2 = 3,5$; b) $x^2 = 132$.

Có thể em chưa biết

Thời xa xưa, con người làm tính bằng cách đếm ngón tay, ngón chân rồi đến đốt ngón tay, đốt ngón chân ; khi gặp các số lớn hơn, người ta dùng hòn sỏi, hạt cây. Sau đó, họ làm ra các bàn tính gảy (có thể bắt đầu do ghép xâu các hạt cây lại). Dùng bàn tính gảy, người ta có thể tính toán được với cả các số thập phân. Hiện nay, bàn tính gảy vẫn còn được sử dụng ngay cả ở các nước rất sẵn máy tính bỏ túi.

Sự phát triển của khoa học, kĩ thuật và nhu cầu thương mại đã đòi hỏi phải đặt ra các bảng tính sẵn. Các nhà thiên văn học, toán học Cô-péc-ních (Ba Lan), Kê-ple (Đức), Nê-pe (Anh) là những người đầu tiên xây dựng kĩ thuật tính toán và đã lập ra nhiều bảng tính sẵn. Bảng số với 4 chữ số thập phân là một dạng bảng tính sẵn như thế.

Ngày nay, những chiếc máy tính bỏ túi gọn nhẹ không chỉ thay thế các bảng tính sẵn để tính một cách nhanh chóng mà còn có độ chính xác cao hơn. Tuy nhiên, cũng như các bàn tính gảy, các bảng tính sẵn vẫn có những ưu thế riêng nên người ta vẫn tiếp tục dùng chúng. Mạnh hơn những chiếc máy tính bỏ túi và cũng dễ dàng mang theo bên người là những chiếc máy tính xách tay.



Chuỗi hạt cây để đếm, bàn tính gảy, chiếc máy tính bỏ túi và chiếc máy tính xách tay.

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

?1 *Với* $a \geq 0$, $b \geq 0$, *hãy chứng tỏ* $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

• Đẳng thức $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ trong **?1** cho phép ta thực hiện phép biến đổi $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ (với $a \geq 0$, $b \geq 0$) Phép biến đổi này được gọi là phép *đưa thừa số ra ngoài dấu căn.*

• Đôi khi, ta phải biến đổi biểu thức dưới dấu căn về dạng thích hợp rồi mới thực hiện được phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Ví dụ 1

a) $\sqrt{3^2.2} = 3\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{2^2.5} = 2\sqrt{5}$.

• Có thể sử dụng phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn để rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}.$$

Giải

$$\begin{aligned} 3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5} &= 3\sqrt{5} + \sqrt{2^2 . 5} + \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \\ &= (3 + 2 + 1)\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Các biểu thức $3\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ và $\sqrt{5}$ được gọi là *đồng dạng* với nhau.

?2 *Rút gọn biểu thức*

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$;

b) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$.

Một cách tổng quát :

Với hai biểu thức A, B *mà* $B \geq 0$, *ta có* $\sqrt{A^2 . B} = |A|\sqrt{B}$, *tức là :*

Nếu $A \geq 0$ *và* $B \geq 0$ *thì* $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$;

Nếu $A < 0$ *và* $B \geq 0$ *thì* $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$.

Ví dụ 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{4x^2y}$ với $x \geq 0, y \geq 0$;

b) $\sqrt{18xy^2}$ với $x \geq 0, y < 0$.

Giải

a) $\sqrt{4x^2y} = \sqrt{(2x)^2y} = |2x|\sqrt{y} = 2x\sqrt{y}$ (với $x \geq 0, y \geq 0$).

b) $\sqrt{18xy^2} = \sqrt{(3y)^2 2x} = |3y|\sqrt{2x} = -3y\sqrt{2x}$ (với $x \geq 0, y < 0$).

?3 *Đưa thừa số ra ngoài dấu căn*

a) $\sqrt{28a^4b^2}$ *với* $b \geq 0$;

b) $\sqrt{72a^2b^4}$ *với* $a < 0$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

• Phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn có phép biến đổi ngược với nó là phép *đưa thừa số vào trong dấu căn.*

Với $A \geq 0$ *và* $B \geq 0$ *ta có* $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$.

Với $A < 0$ *và* $B \geq 0$ *ta có* $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

Ví dụ 4. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $3\sqrt{7}$; b) $-2\sqrt{3}$;

c) $5a^2\sqrt{2a}$ với $a \geq 0$; d) $-3a^2\sqrt{2ab}$ với $ab \geq 0$.

Giải

a) $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2.7} = \sqrt{63}$.

b) $-2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2.3} = -\sqrt{12}$.

c) $5a^2\sqrt{2a} = \sqrt{(5a^2)^2.2a} = \sqrt{25a^4.2a} = \sqrt{50a^5}$.

d) $-3a^2\sqrt{2ab} = -\sqrt{(3a^2)^2.2ab} = -\sqrt{9a^4.2ab} = -\sqrt{18a^5b}$.

?4 *Đưa thừa số vào trong dấu căn*

a) $3\sqrt{5}$; *b)* $1,2\sqrt{5}$;

c) $ab^4\sqrt{a}$ *với* $a \geq 0$; *d)* $-2ab^2\sqrt{5a}$ *với* $a \geq 0$.

• Có thể sử dụng phép đưa thừa số vào trong (hoặc ra ngoài) dấu căn để so sánh các căn bậc hai.

Ví dụ 5. So sánh $3\sqrt{7}$ với $\sqrt{28}$.

Giải

Cách 1. $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2.7} = \sqrt{63}$.

Vì $\sqrt{63} > \sqrt{28}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Cách 2. $\sqrt{28} = \sqrt{2^2.7} = 2\sqrt{7}$. Vì $3\sqrt{7} > 2\sqrt{7}$ nên $3\sqrt{7} > \sqrt{28}$.

Bài tập

43. Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{54}$; b) $\sqrt{108}$; c) $0,1\sqrt{20000}$;

d) $-0,05\sqrt{28800}$; e) $\sqrt{7.63.a^2}$.

44. Đưa thừa số vào trong dấu căn

$$3\sqrt{5}\ ;\ -5\sqrt{2}\ ;\ -\frac{2}{3}\sqrt{xy} \text{ với } xy \geq 0\ ;\ x\sqrt{\frac{2}{x}} \text{ với } x > 0.$$

45. So sánh

a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$; b) 7 và $3\sqrt{5}$;

c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

46. Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$:

a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$; b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

47. Rút gọn

a) $\frac{2}{x^2 - y^2}\sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq y$;

b) $\frac{2}{2a-1}\sqrt{5a^2(1 - 4a + 4a^2)}$ với $a > 0,5$.

§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

(tiếp theo)

1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Khi biến đổi biểu thức chứa căn thức bậc hai, người ta có thể sử dụng phép khử mẫu của biểu thức lấy căn. Dưới đây là một số trường hợp đơn giản.

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; b) $\sqrt{\frac{5a}{7b}}$ với a.b > 0.

Giải

a) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2.3}{3.3}} = \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) $\sqrt{\frac{5a}{7b}} = \sqrt{\frac{5a.7b}{7b.7b}} = \frac{\sqrt{5a.7b}}{\sqrt{(7b)^2}} = \frac{\sqrt{35ab}}{7|b|}$.

Một cách tổng quát :

Với các biểu thức A, B *mà* A.B ≥ 0 và B ≠ 0, *ta có*

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}.$$

?1 *Khử mẫu của biểu thức lấy căn*

a) $\sqrt{\frac{4}{5}}$; *b)* $\sqrt{\frac{3}{125}}$; *c)* $\sqrt{\frac{3}{2a^3}}$ *với* a > 0.

2. Trục căn thức ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu cũng là một phép biến đổi đơn giản thường gặp. Dưới đây là một số trường hợp đơn giản.

Ví dụ 2. Trục căn thức ở mẫu

a) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; b) $\frac{10}{\sqrt{3}+1}$; c) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2.3} = \frac{5}{6}\sqrt{3}$.

b) $\frac{10}{\sqrt{3}+1} = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 5(\sqrt{3}-1)$.

c) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = 3(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

Trong ví dụ trên ở câu b), để trục căn thức ở mẫu, ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức $\sqrt{3}-1$. Ta gọi biểu thức $\sqrt{3}+1$ và biểu thức $\sqrt{3}-1$ là *hai biểu thức liên hợp với nhau*. Tương tự, ở câu c), ta nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ là $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Một cách tổng quát :

a) Với các biểu thức A, B *mà* B > 0, *ta có*

$$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

b) Với các biểu thức A, B, C *mà* $A \geq 0$ *và* $A \neq B^2$, *ta có*

$$\frac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\frac{C(\sqrt{A}\mp B)}{A-B^2}.$$

c) Với các biểu thức A, B, C *mà* $A \geq 0$, $B \geq 0$ *và* $A \neq B$, *ta có*

$$\frac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\frac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}.$$

?2 *Trục căn thức ở mẫu :*

a) $\frac{5}{3\sqrt{8}}$, $\frac{2}{\sqrt{b}}$ *với* $b > 0$;

b) $\frac{5}{5-2\sqrt{3}}$, $\frac{2a}{1-\sqrt{a}}$ *với* $a \geq 0$ *và* $a \neq 1$;

c) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$, $\frac{6a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ *với* $a > b > 0$.

Bài tập

Khử mẫu của biểu thức lấy căn (các bài 48 và 49)

48. $\sqrt{\frac{1}{600}}$; $\sqrt{\frac{11}{540}}$; $\sqrt{\frac{3}{50}}$; $\sqrt{\frac{5}{98}}$; $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.

49. $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$; $\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}}$; $\sqrt{\frac{9a^3}{36b}}$; $3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$.

(Giả thiết các biểu thức có nghĩa).

Trục căn thức ở mẫu với giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa (từ bài 50 đến bài 52)

50. $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$; $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$; $\dfrac{1}{3\sqrt{20}}$; $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{5\sqrt{2}}$; $\dfrac{y+b.\sqrt{y}}{b.\sqrt{y}}$.

51. $\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$; $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; $\dfrac{b}{3+\sqrt{b}}$; $\dfrac{p}{2\sqrt{p}-1}$.

52. $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$; $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; $\dfrac{2ab}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Luyện tập

53. Rút gọn các biểu thức sau (giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa) :

a) $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; b) $ab\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2b^2}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{a}{b^4}}$; d) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

54. Rút gọn các biểu thức sau (giả thiết các biểu thức chữ đều có nghĩa) :

$\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}$; $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}$; $\dfrac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$; $\dfrac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$.

55. Phân tích thành nhân tử (với a, b, x, y là các số không âm)

a) $ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$;

b) $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$.

56. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần

a) $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{2}$, $\sqrt{38}$, $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$.

57. $\sqrt{25x}-\sqrt{16x}=9$ khi x bằng

(A) 1 ; (B) 3 ; (C) 9 ; (D) 81.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

Ví dụ 1. Rút gọn $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0$.

Giải. Ta có

$$5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5} = 5\sqrt{a} + \frac{6}{2}\sqrt{a} - a\sqrt{\frac{4a}{a^2}} + \sqrt{5}$$

$$= 5\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + \sqrt{5} = 6\sqrt{a} + \sqrt{5}.$$

?1 *Rút gọn* $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$ *với* $a \geq 0$.

Rút gọn biểu thức được áp dụng trong nhiều bài toán về biểu thức có chứa căn thức bậc hai.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}.$$

Giải. Biến đổi vế trái, ta có

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2}.$$

Sau khi biến đổi, ta thấy vế trái bằng vế phải. Vậy đẳng thức được chứng minh.

?2 *Chứng minh đẳng thức*

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right) \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tìm giá trị của a để $P < 0$.

Giải

a) $P = \left(\dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \dfrac{(\sqrt{a}-1)^2-(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}$

$= \left(\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \dfrac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1} = \dfrac{(a-1)(-4\sqrt{a})}{(2\sqrt{a})^2}$

$= \dfrac{(1-a).4\sqrt{a}}{4a} = \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}.$

Vậy $P = \dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

b) Do $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $P < 0$ khi và chỉ khi

$$\frac{1-a}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow 1-a<0 \Leftrightarrow a > 1.$$

?3 *Rút gọn các biểu thức sau :*

a) $\dfrac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$; *b)* $\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ *với* $a \geq 0$ *và* $a \neq 1$.

Bài tập

58. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{5}$; b) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{4,5}+\sqrt{12,5}$;

c) $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}$; d) $0,1.\sqrt{200}+2\,.\,\sqrt{0,08}+0,4\,.\,\sqrt{50}$.

59. Rút gọn các biểu thức sau (với $a > 0$, $b > 0$) :

a) $5\sqrt{a}-4b\sqrt{25a^3}+5a\sqrt{16ab^2}-2\sqrt{9a}$;

b) $5a\sqrt{64ab^3}-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{12a^3b^3}+2ab\sqrt{9ab}-5b\sqrt{81a^3b}$.

60. Cho biểu thức $B = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$ với $x \geq -1$.

a) Rút gọn biểu thức B ;

b) Tìm x sao cho B có giá trị là 16.

61. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\dfrac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} - 4\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$;

b) $\left(x\sqrt{\dfrac{6}{x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\dfrac{1}{3}$ với $x > 0$.

Luyện tập

Rút gọn các biểu thức sau (các bài 62 và 63) :

62. a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\dfrac{1}{3}}$; b) $\sqrt{150} + \sqrt{1,6}.\sqrt{60} + 4,5.\sqrt{2\dfrac{2}{3}} - \sqrt{6}$;

c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$; d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.

63. a) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ với $a > 0$ và $b > 0$;

b) $\sqrt{\dfrac{m}{1-2x+x^2}}.\sqrt{\dfrac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$ với $m > 0$ và $x \neq 1$.

64. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$;

b) $\dfrac{a+b}{b^2}\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a + b > 0$ và $b \neq 0$.

65. Rút gọn rồi so sánh giá trị của M với 1, biết

$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \quad \text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

66. Giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) 1 ; (C) -4 ; (D) 4.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

§9. Căn bậc ba

Có gì khác căn bậc hai không ?

1. Khái niệm căn bậc ba

Bài toán : Một người thợ cần làm một thùng hình lập phương chứa được đúng 64 lít nước.

Hỏi người thợ đó phải chọn độ dài cạnh của thùng là bao nhiêu đêximét ?

Giải

Gọi x (dm) là độ dài cạnh của thùng hình lập phương. Theo bài ra ta có $x^3 = 64$. Ta thấy $x = 4$ vì $4^3 = 64$. Vậy độ dài cạnh của thùng là 4dm.

Từ $4^3 = 64$, người ta gọi 4 là căn bậc ba của 64.

ĐỊNH NGHĨA

Căn bậc ba của một số a *là số* x *sao cho* $x^3 = a$.

Ví dụ 1. 2 là căn bậc ba của 8, vì $2^3 = 8$.

-5 là căn bậc ba của -125, vì $(-5)^3 = -125$.

Ta công nhận kết quả sau :

Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$. Số 3 gọi là chỉ số của căn. Phép tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

➢ ***Chú ý.*** *Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có* $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

?1 *Tìm căn bậc ba của mỗi số sau :*

a) 27 ; *b)* -64 ; *c)* 0 ; *d)* $\frac{1}{125}$.

Giải mẫu. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$.

Nhận xét

Căn bậc ba của số dương là số dương ;

Căn bậc ba của số âm là số âm ;

Căn bậc ba của số 0 là chính số 0.

2. Tính chất

Tương tự tính chất của căn bậc hai, ta có các tính chất sau của căn bậc ba :

a) $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$.

c) Với $b \neq 0$, ta có $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

Dựa vào các tính chất trên, ta có thể so sánh, tính toán, biến đổi các biểu thức chứa căn bậc ba.

Ví dụ 2. So sánh 2 và $\sqrt[3]{7}$.

Giải. Ta có $2 = \sqrt[3]{8}$; $8 > 7$ nên $\sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{7}$. Vậy $2 > \sqrt[3]{7}$.

Ví dụ 3. Rút gọn $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$.

Giải. Ta có $\sqrt[3]{8a^3} - 5a = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{a^3} - 5a = 2a - 5a = -3a.$

?2 *Tính* $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$ *theo hai cách.*

Bài tập

67. Hãy tìm

$\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{-729}$; $\sqrt[3]{0{,}064}$; $\sqrt[3]{-0{,}216}$; $\sqrt[3]{-0{,}008}$.

68. Tính

a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$;

b) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54}.\sqrt[3]{4}$.

69. So sánh

a) 5 và $\sqrt[3]{123}$;

b) $5\sqrt[3]{6}$ và $6\sqrt[3]{5}$.

Bài đọc thêm

TÌM CĂN BẬC BA NHỜ BẢNG SỐ VÀ MÁY TÍNH BỎ TÚI

1. Tìm căn bậc ba nhờ bảng số

Trong "Bảng số với 4 chữ số thập phân" của V.M. Bra-đi-xơ không có bảng tính sẵn căn bậc ba, nhưng ta có thể dùng bảng lập phương (bảng V) để tìm căn bậc ba của một số cho trước.

a) Giới thiệu bảng lập phương

Bảng lập phương được chia thành các hàng và các cột. Ta cũng quy ước gọi tên của các hàng (cột) theo số được ghi ở cột đầu tiên (hàng đầu tiên) của mỗi trang.

Dùng bảng lập phương ta có thể tìm được lập phương của số từ 1,000 đến 10,00. Với những số được viết bởi không quá ba chữ số, lập phương của nó được tìm trực tiếp từ bảng. Với những số được viết bởi bốn chữ số, ta phải dùng thêm các số ở cột hiệu chính.

b) Cách dùng bảng lập phương tìm căn bậc ba

Ví dụ 1. Tìm $\sqrt[3]{344,5}$.

Ta tìm số 344,5 ở trong bảng. Số 344,5 nằm ở giao của hàng **7,0** và cột **1**, có nghĩa $(7,01)^3 \approx 344,5$.

Vậy $\sqrt[3]{344,5} \approx 7,01$ (mẫu 3).

N	0	1	...
.			
.			
.			
7,0		344,5	
.			
.			
.			

Mẫu 3

Ví dụ 2. Tìm $\sqrt[3]{103}$.

Do không tìm thấy số 103 ở trong bảng, ta chọn số gần nhất với nó.

Đó là số 103,16 nằm ở giao của hàng **4,6** và cột **9** nên $(4,69)^3 \approx 103,16$. Do đó $\sqrt[3]{103,16} \approx 4,69$. Trên hàng **4,6** ta tìm trong các cột hiệu chính số nào gần với số 16 nhất, ta thấy số 13 (hoặc số 19), nằm ở cột **2** (hoặc cột **3**) hiệu chính. Ta hiệu chính $\sqrt[3]{103,16}$ để xác định $\sqrt[3]{103}$ như sau :

N	...	9	1	2	3	...
.						
.						
.						
4,6		103,16		*13*	*19*	
.						
.						
.						

Mẫu 4

$$4,69 - 0,002 = 4,688 \text{ (hoặc } 4,69 - 0,003 = 4,687).$$

Vậy $\sqrt[3]{103} \approx 4,688$ (hoặc $\sqrt[3]{103} \approx 4,687$) (mẫu 4).

Ví dụ 3. Tìm $\sqrt[3]{0,103}$.

Ta biết $\quad 0,103 = 103 : 1000$.

Do đó $\quad \sqrt[3]{0,103} = \sqrt[3]{103} : \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{103} : 10$.

Tra bảng tìm $\sqrt[3]{103} \approx 4,688$. Vậy $\sqrt[3]{0,103} \approx 4,688 \times 0,1 = 0,4688$.

➢ ***Chú ý.*** *Bảng lập phương có nêu hướng dẫn "Khi dời dấu phẩy trong số N đi 1 chữ số thì phải dời dấu phẩy trong số* N^3 *đi 3 chữ số" nên khi tìm căn bậc ba, ta thực hành như sau :*

Khi dời dấu phẩy trong số N đi 3, 6, 9,... chữ số, ta dời dấu phẩy theo cùng chiều ở số $\sqrt[3]{N}$ *đi 1, 2, 3,... chữ số (ví dụ 3 minh hoạ trường hợp dời dấu phẩy ở số 103 sang trái 3 chữ số nên phải dời dấu phẩy ở số 4,688 sang trái 1 chữ số).*

2. Tìm căn bậc ba bằng máy tính bỏ túi

Có thể dùng máy tính bỏ túi có nút bấm $\sqrt[3]{\ }$ để tìm căn bậc ba như sau.

Ví dụ 4. (Trên máy CASIO *fx-220*).

Tính	Nút bấm	Kết quả
$\sqrt[3]{1728}$	$\boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$	12
$\sqrt[3]{11390,625}$	$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{0}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$	22,5
$\sqrt[3]{-12,167}$	$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$	–2,3

Ví dụ 5. (Trên máy SHARP *EL–500M*)

Tính	Nút bấm	Kết quả
$\sqrt[3]{1728}$	$\boxed{3}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$	12
$\sqrt[3]{11390,625}$	$\boxed{3}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{9}\ \boxed{0}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	22,5
$\sqrt[3]{-12,167}$	$\boxed{3}\ \boxed{\text{2ndF}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{(-)}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$	–2,3

Ôn tập chương I

Câu hỏi

1. Nêu điều kiện để x là căn bậc hai số học của số a không âm. Cho ví dụ.

2. Chứng minh $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số a.

3. Biểu thức A phải thoả mãn điều kiện gì để $\sqrt{A}$ xác định ?

4. Phát biểu và chứng minh định lí về mối liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương. Cho ví dụ.

5. Phát biểu và chứng minh định lí về mối liên hệ giữa phép chia và phép khai phương. Cho ví dụ.

Các công thức biến đổi căn thức

1) $\sqrt{A^2} = |A|$.

2) $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$).

3) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0$ và $B > 0$).

4) $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).

5) $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$).

$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0$ và $B \geq 0$).

6) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (với $AB \geq 0$ và $B \neq 0$).

7) $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$).

8) $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$ (với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$).

9) $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$ (với $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$).

Bài tập

70. Tìm giá trị các biểu thức sau bằng cách biến đổi, rút gọn thích hợp :

a) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{16}{49}\cdot\frac{196}{9}}$; b) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot2\frac{14}{25}\cdot2\frac{34}{81}}$;

c) $\frac{\sqrt{640}.\sqrt{34,3}}{\sqrt{567}}$; d) $\sqrt{21,6}.\sqrt{810}.\sqrt{11^2-5^2}$.

71. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(\sqrt{8}-3.\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{2}-\sqrt{5}$; b) $0,2\sqrt{(-10)^2.3}+2\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$;

c) $\left(\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}.\sqrt{2}+\frac{4}{5}.\sqrt{200}\right):\frac{1}{8}$; d) $2\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{2.(-3)^2}-5\sqrt{(-1)^4}$.

72. Phân tích thành nhân tử (với các số x, y, a, b không âm và $a \geq b$)

a) $xy-y\sqrt{x}+\sqrt{x}-1$; b) $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}$;

c) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a^2-b^2}$; d) $12-\sqrt{x}-x$.

73. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $\sqrt{-9a}-\sqrt{9+12a+4a^2}$ tại $a=-9$; b) $1+\frac{3m}{m-2}\sqrt{m^2-4m+4}$ tại $m=1,5$;

c) $\sqrt{1-10a+25a^2}-4a$ tại $a=\sqrt{2}$; d) $4x-\sqrt{9x^2+6x+1}$ tại $x=-\sqrt{3}$.

74. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{(2x-1)^2}=3$;

b) $\frac{5}{3}\sqrt{15x}-\sqrt{15x}-2=\frac{1}{3}\sqrt{15x}$.

75. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}-\frac{\sqrt{216}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=-1,5$;

b) $\left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2$;

c) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a-b$ với a, b dương và $a\neq b$;

d) $\left(1+\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a$ với $a\geq 0$ và $a\neq 1$.

76. Cho biểu thức

$$Q=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}-\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\quad \text{với } a>b>0.$$

a) Rút gọn Q ;

b) Xác định giá trị của Q khi a = 3b.

Chương II – **HÀM SỐ BẬC NHẤT**

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Khái niệm hàm số

• Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x, ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x, và x được gọi là *biến số*.

• Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc bằng công thức,...

Ví dụ 1

a) y là hàm số của x được cho bằng bảng sau :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	6	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

b) y là hàm số của x được cho bằng công thức :

$y = 2x$; $y = 2x + 3$; $y = \frac{4}{x}$.

• Khi hàm số được cho bằng công thức $y = f(x)$, ta hiểu rằng biến số x chỉ lấy những giá trị mà tại đó $f(x)$ xác định. Chẳng hạn, ở các ví dụ trên, giá trị của các biểu thức $2x$, $2x + 3$ luôn luôn xác định với mọi giá trị của x nên trong các hàm số $y = 2x$ và $y = 2x + 3$, biến số x có thể lấy những giá trị tuỳ ý ; còn trong hàm số $y = \frac{4}{x}$, biến số x chỉ lấy những giá trị khác 0, vì giá trị của biểu thức $\frac{4}{x}$ không xác định khi $x = 0$.

• Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$,... Ví dụ, đối với hàm số $y = 2x + 3$, ta còn có thể viết $y = f(x) = 2x + 3$; khi đó, thay cho câu "Khi x bằng 3 thì giá trị tương ứng của y là 9", ta viết $f(3) = 9$.

• Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là *hàm hằng*.

?1 *Cho hàm số* $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

Tính $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(-10)$.

2. Đồ thị của hàm số

?2 *a) Biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng toạ độ* Oxy :

$A\left(\frac{1}{3}; 6\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $C(1; 2)$, $D(2; 1)$, $E\left(3; \frac{2}{3}\right)$, $F\left(4; \frac{1}{2}\right)$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x$.

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x ; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ được gọi là *đồ thị của hàm số* $y = f(x)$. Chẳng hạn, tập hợp các điểm A, B, C, D, E, F vẽ được trong **?2** *a)* là đồ thị của hàm số được cho bằng bảng ở ví dụ 1a) ; tập hợp các điểm của đường thẳng vẽ được trong **?2** *b)* là đồ thị của hàm số $y = 2x$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

?3 *Tính giá trị* y *tương ứng của các hàm số* $y = 2x + 1$ *và* $y = -2x + 1$ *theo giá trị đã cho của biến* x *rồi điền vào bảng sau :*

x	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5
$y = 2x + 1$									
$y = -2x + 1$									

a) Xét hàm số $y = 2x + 1$.

Dễ thấy $2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Qua bảng trên ta thấy : Khi cho x các giá trị tuỳ ý tăng lên thì các giá trị tương ứng của $y = 2x + 1$ cũng tăng lên. Ta nói rằng hàm số $y = 2x + 1$ đồng biến trên **R**.

b) Xét hàm số $y = -2x + 1$, ta thấy :

$-2x + 1$ xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Khi cho x các giá trị tuỳ ý tăng lên thì các giá trị tương ứng của $y = -2x + 1$ lại giảm đi. Ta nói rằng hàm số $y = -2x + 1$ nghịch biến trên **R**.

Một cách tổng quát :

Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định với mọi giá trị của x thuộc* **R**

a) Nếu giá trị của biến x *tăng lên mà giá trị tương ứng* f(x) *cũng tăng lên thì hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là* ***hàm số đồng biến*** *trên* **R** *(gọi tắt là hàm số đồng biến).*

b) Nếu giá trị của biến x *tăng lên mà giá trị tương ứng* f(x) *lại giảm đi thì hàm số* $y = f(x)$ *được gọi là* ***hàm số nghịch biến*** *trên* **R** *(gọi tắt là hàm số nghịch biến).*

Nói cách khác, với x_1, x_2 *bất kì thuộc* **R** :

Nếu $x_1 < x_2$ *mà* $f(x_1) < f(x_2)$ *thì hàm số* $y = f(x)$ ***đồng biến*** *trên* **R** ;

Nếu $x_1 < x_2$ *mà* $f(x_1) > f(x_2)$ *thì hàm số* $y = f(x)$ ***nghịch biến*** *trên* **R**.

Bài tập

1. a) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x$.

Tính : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$.

b) Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$.

Tính : $g(-2)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(3)$.

c) Có nhận xét gì về giá trị của hai hàm số đã cho ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị ?

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

a) Tính các giá trị tương ứng của y theo các giá trị của x rồi điền vào bảng sau :

x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = -\frac{1}{2}x + 3$											

b) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến ? Vì sao ?

3. Cho hai hàm số y = 2x và y = −2x.

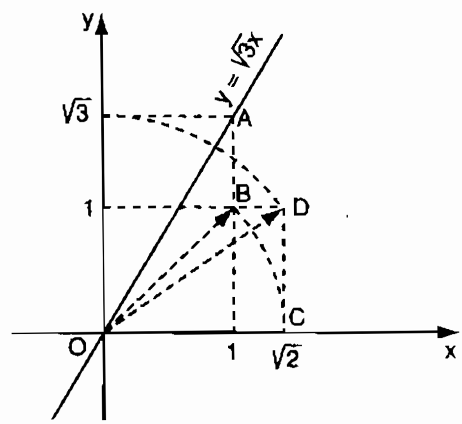
a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Trong hai hàm số đã cho, hàm số nào đồng biến ? Hàm số nào nghịch biến ? Vì sao ?

Luyện tập

4. Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x$ được vẽ bằng compa và thước thẳng ở hình 4.

Hãy tìm hiểu và trình bày lại các bước thực hiện vẽ đồ thị đó.

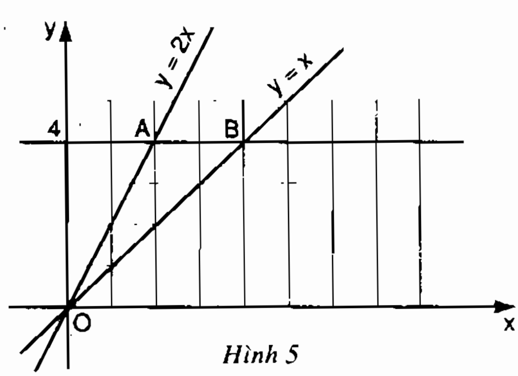


Hình 4

5. a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = x và y = 2x trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy (h.5).

b) Đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ y = 4 lần lượt cắt các đường thẳng y = 2x, y = x tại hai điểm A và B.

Tìm toạ độ của các điểm A, B và tính chu vi, diện tích của tam giác OAB theo đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét.



Hình 5

6. Cho các hàm số y = 0,5x và y = 0,5x + 2.

a) Tính giá trị y tương ứng của mỗi hàm số theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau :

x	–2,5	–2,25	–1,5	–1	0	1	1,5	2,25	2,5
y = 0,5x									
y = 0,5x + 2									

b) Có nhận xét gì về các giá trị tương ứng của hai hàm số đó khi biến x lấy cùng một giá trị ?

7. Cho hàm số $y = f(x) = 3x$.

Cho x hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$.

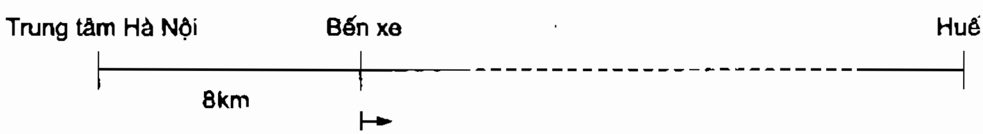
Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho đồng biến trên **R**.

§2. Hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất có dạng như thế nào ?

1. Khái niệm về hàm số bậc nhất

Bài toán : Một xe ôtô chở khách đi từ bến xe Phía nam Hà Nội vào Huế với vận tốc trung bình 50km/h. Hỏi sau t giờ xe ôtô đó cách trung tâm Hà Nội bao nhiêu kilômét ? Biết rằng bến xe Phía nam cách trung tâm Hà Nội 8km.



?1 *Hãy điền vào chỗ trống (...) cho đúng*

Sau 1 *giờ, ôtô đi được : ...*

Sau t *giờ, ôtô đi được : ...*

Sau t *giờ, ôtô cách trung tâm Hà Nội là :* s = ...

?2 *Tính các giá trị tương ứng của* s *khi cho* t *lần lượt lấy các giá trị* 1 *giờ ;* 2 *giờ ;* 3 *giờ ;* 4 *giờ... rồi giải thích tại sao* s *là hàm số của* t *?*

ĐỊNH NGHĨA

> ***Hàm số bậc nhất*** *là hàm số được cho bởi công thức*
>
> $$y = ax + b$$
>
> *trong đó* a, b *là các số cho trước và* $a \neq 0$.

➢ ***Chú ý.*** *Khi* $b = 0$, *hàm số có dạng* $y = ax$ *(đã học ở lớp 7).*

2. Tính chất

Để tìm hiểu tính chất của hàm số bậc nhất, trước tiên ta xét ví dụ sau đây :

Ví dụ. Xét hàm số $y = f(x) = -3x + 1$.

Hàm số $y = -3x + 1$ luôn xác định với mọi giá trị của x thuộc **R** vì biểu thức $-3x + 1$ luôn xác định với mọi giá trị của x thuộc **R**.

Khi cho biến x lấy hai giá trị bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ hay $x_2 - x_1 > 0$, ta có

$f(x_2) - f(x_1) = (-3x_2 + 1) - (-3x_1 + 1) = -3(x_2 - x_1) < 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số $y = -3x + 1$ là hàm số nghịch biến trên **R**.

?3 *Cho hàm số bậc nhất* $y = f(x) = 3x + 1$.

Cho x *hai giá trị bất kì* x_1, x_2, *sao cho* $x_1 < x_2$. *Hãy chứng minh* $f(x_1) < f(x_2)$ *rồi rút ra kết luận hàm số đồng biến trên* **R**.

• ***Tổng quát***

> *Hàm số bậc nhất* $y = ax + b$ *xác định với mọi giá trị của* x *thuộc* **R** *và có tính chất sau :*
>
> *a) Đồng biến trên* **R**, *khi* $a > 0$.
>
> *b) Nghịch biến trên* **R**, *khi* $a < 0$.

?4 *Cho ví dụ về hàm số bậc nhất trong các trường hợp sau :*

a) Hàm số đồng biến ; *b) Hàm số nghịch biến.*

Bài tập

8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng và xét xem hàm số bậc nhất nào đồng biến, nghịch biến.

a) $y = 1 - 5x$; b) $y = -0{,}5x$;

c) $y = \sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3}$; d) $y = 2x^2 + 3$.

9. Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x + 3$. Tìm các giá trị của m để hàm số :

a) Đồng biến ;

b) Nghịch biến.

10. Một hình chữ nhật có các kích thước là 20cm và 30cm. Người ta bớt mỗi kích thước của hình đó đi x (cm) được hình chữ nhật mới có chu vi là y (cm). Hãy lập công thức tính y theo x.

Luyện tập

11. Hãy biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng toạ độ : A(–3 ; 0), B(–1 ; 1), C(0 ; 3) , D(1 ; 1), E(3 ; 0), F(1 ; –1), G(0 ; –3), H(–1 ; –1).

12. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$. Tìm hệ số a, biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 2{,}5$.

13. Với những giá trị nào của m thì mỗi hàm số sau là hàm số bậc nhất ?

a) $y = \sqrt{5 - m}\,(x - 1)$;

b) $y = \dfrac{m + 1}{m - 1}x + 3{,}5$.

14. Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})\,x - 1$.

a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên **R** ? Vì sao ?

b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{5}$;

c) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{5}$.

§3. Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0)

Vẽ đồ thị hàm số y = ax + b (a ≠ 0) như thế nào ?

1. Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0)

?1 *Biểu diễn các điểm sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :*

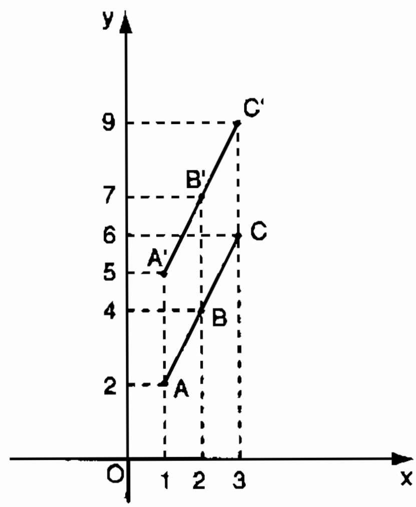
A(1 ; 2), B(2 ; 4), C(3 ; 6),

A'(1 ; 2 + 3), B'(2 ; 4 + 3), C'(3 ; 6 + 3).

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy (h.6), với cùng hoành độ thì tung độ của mỗi điểm A', B', C' đều lớn hơn tung độ của mỗi điểm tương ứng A, B, C là 3 đơn vị.

Ta có A'B'//AB và B'C'//BC (vì các tứ giác AA'B'B và BB'C'C đều là hình bình hành).

Từ đó suy ra : Nếu A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng (d) thì A', B', C' cùng nằm trên một đường thẳng (d') song song với (d).



Hình 6

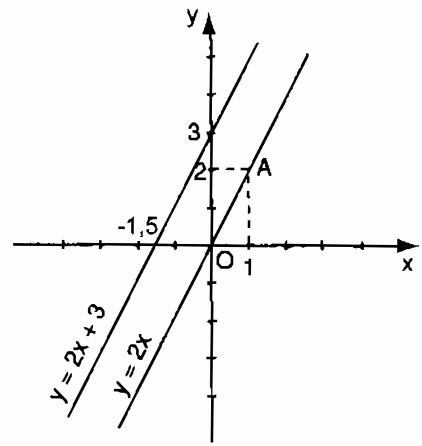
?2 *Tính giá trị* y *tương ứng của các hàm số* y = 2x *và* y = 2x + 3 *theo giá trị đã cho của biến* x *rồi điền vào bảng sau :*

x	−4	−3	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2	3	4
y = 2x											
y = 2x + 3											

Ta thấy rằng :

Với bất kì hoành độ x nào thì tung độ y của điểm thuộc đồ thị hàm số y = 2x + 3 cũng lớn hơn tung độ y tương ứng của điểm thuộc đồ thị hàm số y = 2x là 3 đơn vị.

Ta đã biết, đồ thị của hàm số y = 2x là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0 ; 0) và điểm A(1 ; 2). Qua nhận xét ở trên, ta thấy rằng đồ thị của hàm số y = 2x + 3 là một đường thẳng song song với đường thẳng y = 2x và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 (h.7).



Hình 7

• ***Tổng quát***

Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0) *là một đường thẳng :* – *Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng* b ; – *Song song với đường thẳng* y = ax, *nếu* b ≠ 0 ; *trùng với đường thẳng* y = ax, *nếu* b = 0.

➢ ***Chú ý.*** *Đồ thị của hàm số* y = ax + b (a ≠ 0) *còn được gọi là đường thẳng* y = ax + b ; b *được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.*

2. Cách vẽ đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0)

• Khi b = 0 thì y = ax. Đồ thị của hàm số y = ax là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0 ; 0) và điểm A(1 ; a).

• Xét trường hợp y = ax + b với a ≠ 0 và b ≠ 0.

Ta đã biết đồ thị của hàm số y = ax + b là một đường thẳng. Do đó, để vẽ đồ thị hàm số y = ax + b, ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Trong thực hành, ta thường xác định hai điểm đặc biệt là giao điểm của đồ thị với hai trục toạ độ.

Bước 1. Cho x = 0 thì y = b, ta được điểm P(0 ; b) thuộc trục tung Oy.

Cho y = 0 thì $x = -\frac{b}{a}$, ta được điểm $Q\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox.

Bước 2. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P và Q ta được đồ thị của hàm số y = ax + b.

?3 *Vẽ đồ thị của các hàm số sau :*

a) $y = 2x - 3$;

b) $y = -2x + 3$.

Bài tập

15. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2x$; $y = 2x + 5$; $y = -\frac{2}{3}x$ và $y = -\frac{2}{3}x + 5$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác OABC (O là gốc toạ độ). Tứ giác OABC có phải là hình bình hành không ? Vì sao ?

16. a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = x và y = 2x + 2 trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị nói trên, tìm toạ độ điểm A.

c) Vẽ qua điểm B(0 ; 2) một đường thẳng song song với trục Ox, cắt đường thẳng y = x tại điểm C. Tìm toạ độ của điểm C rồi tính diện tích tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét).

Luyện tập

17. a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = x + 1 và y = –x + 3 trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét).

18. a) Biết rằng với $x = 4$ thì hàm số $y = 3x + b$ có giá trị là 11. Tìm b. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị b vừa tìm được.

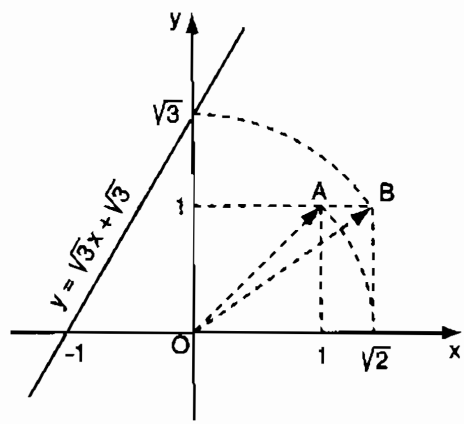
b) Biết rằng đồ thị của hàm số $y = ax + 5$ đi qua điểm $A(-1\ ;\ 3)$. Tìm a. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a vừa tìm được.

19. Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ được vẽ bằng compa và thước thẳng (h.8).

Hãy tìm hiểu cách vẽ đó rồi nêu lại các bước thực hiện.

Áp dụng. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}$ bằng compa và thước thẳng.

Hướng dẫn. Tìm điểm trên trục tung có tung độ bằng $\sqrt{5}$.



Hình 8

§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

> Khi nào thì hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ song song với nhau ? Trùng nhau ? Cắt nhau ?

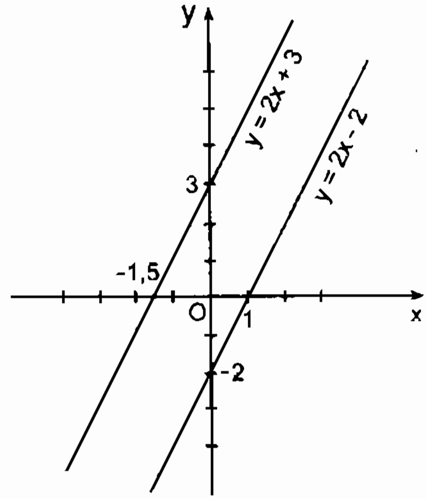
Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ có thể song song, có thể cắt nhau và cũng có thể trùng nhau.

1. Đường thẳng song song

?1 *a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :*

$$y = 2x + 3\ ;\ y = 2x - 2.$$

b) Giải thích vì sao hai đường thẳng $y = 2x + 3$ *và* $y = 2x - 2$ *song song với nhau ? (h.9).*



Hình 9

• Xét hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$.

Khi $a = a'$ và $b \neq b'$ thì hai đường thẳng đó song song với nhau, vì chúng không trùng nhau và mỗi đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng $y = ax$.

Khi $a = a'$ và $b = b'$ thì hai đường thẳng đó trùng nhau, vì thực chất chúng chỉ là một.

Vậy ta có kết luận sau :

> *Hai đường thẳng* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *và* $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ *song song với nhau khi và chỉ khi* $a = a'$, $b \neq b'$ *và trùng nhau khi và chỉ khi* $a = a'$, $b = b'$.

2. Đường thẳng cắt nhau

?2 *Tìm các cặp đường thẳng cắt nhau trong các đường thẳng sau :*

$y = 0{,}5x + 2$;　　$y = 0{,}5x - 1$;　　$y = 1{,}5x + 2$.

Khi $a = a'$ thì hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'(a' \neq 0)$ song song với nhau hoặc trùng nhau và ngược lại. Do đó, khi $a \neq a'$ thì hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ cắt nhau và ngược lại.

Vậy ta có kết luận sau :

> *Hai đường thẳng* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *và* $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ *cắt nhau khi và chỉ khi* $a \neq a'$.

➢ ***Chú ý.*** *Khi* $a \neq a'$ *và* $b = b'$ *thì hai đường thẳng có cùng tung độ gốc, do đó chúng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ là* b.

3. Bài toán áp dụng

Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2mx + 3$ và $y = (m + 1)x + 2$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là :

a) Hai đường thẳng cắt nhau ;

b) Hai đường thẳng song song với nhau.

Giải

Hàm số $y = 2mx + 3$ có các hệ số $a = 2m$ và $b = 3$.

Hàm số $y = (m + 1)x + 2$ có các hệ số $a' = m + 1$ và $b' = 2$.

Các hàm số đã cho là hàm số bậc nhất, do đó các hệ số a và a' phải khác 0, tức là

$$2m \neq 0 \text{ và } m + 1 \neq 0 \text{ hay } m \neq 0 \text{ và } m \neq -1.$$

a) Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$, tức là

$$2m \neq m + 1 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Kết hợp với điều kiện trên, ta có $m \neq 0$, $m \neq -1$ và $m \neq 1$.

b) Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b \neq b'$.

Theo đề bài, ta có $b \neq b'$ (vì $3 \neq 2$).

Vậy đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$, tức là

$$2m = m + 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Kết hợp với điều kiện trên, ta thấy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ghi chú. Khi trình bày lời giải, để cho ngắn gọn, có thể không ghi phần nhận xét các hệ số.

Bài tập

20. Hãy chỉ ra ba cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song với nhau trong số các đường thẳng sau :

a) $y = 1{,}5x + 2$; b) $y = x + 2$; c) $y = 0{,}5x - 3$;

d) $y = x - 3$; e) $y = 1{,}5x - 1$; g) $y = 0{,}5x + 3$.

21. Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx + 3$ và $y = (2m + 1)x - 5$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm số đã cho là :

a) Hai đường thẳng song song với nhau ;

b) Hai đường thẳng cắt nhau.

22. Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$.

b) Khi $x = 2$ thì hàm số có giá trị $y = 7$.

Luyện tập

23. Cho hàm số $y = 2x + b$. Hãy xác định hệ số b trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 ;

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(1 ; 5)$.

24. Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$.

Tìm điều kiện đối với m và k để đồ thị của hai hàm số là :

a) Hai đường thẳng cắt nhau ;

b) Hai đường thẳng song song với nhau ;

c) Hai đường thẳng trùng nhau.

25. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$$y = \frac{2}{3}x + 2 \ ; \qquad\qquad y = -\frac{3}{2}x + 2.$$

b) Một đường thẳng song song với trục hoành Ox, cắt trục tung Oy tại điểm có tung độ bằng 1, cắt các đường thẳng $y = \frac{2}{3}x + 2$ và $y = -\frac{3}{2}x + 2$ theo thứ tự tại hai điểm M và N. Tìm toạ độ của hai điểm M và N.

26. Cho hàm số bậc nhất $y = ax - 4$ (1). Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

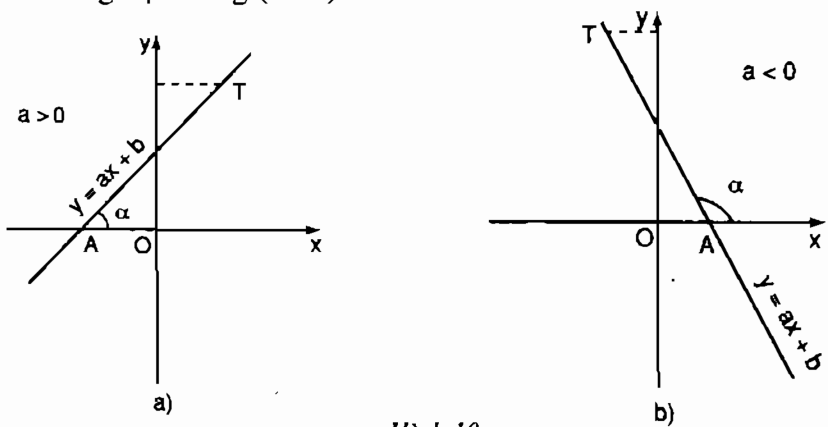
b) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5.

§5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

1. Khái niệm hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

a) Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, khi nói góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox (hoặc nói đường thẳng $y = ax + b$ tạo với trục Ox một góc α), ta hiểu đó là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng y = ax + b với trục Ox, T là điểm thuộc đường thẳng y = ax + b và có tung độ dương (h.10).

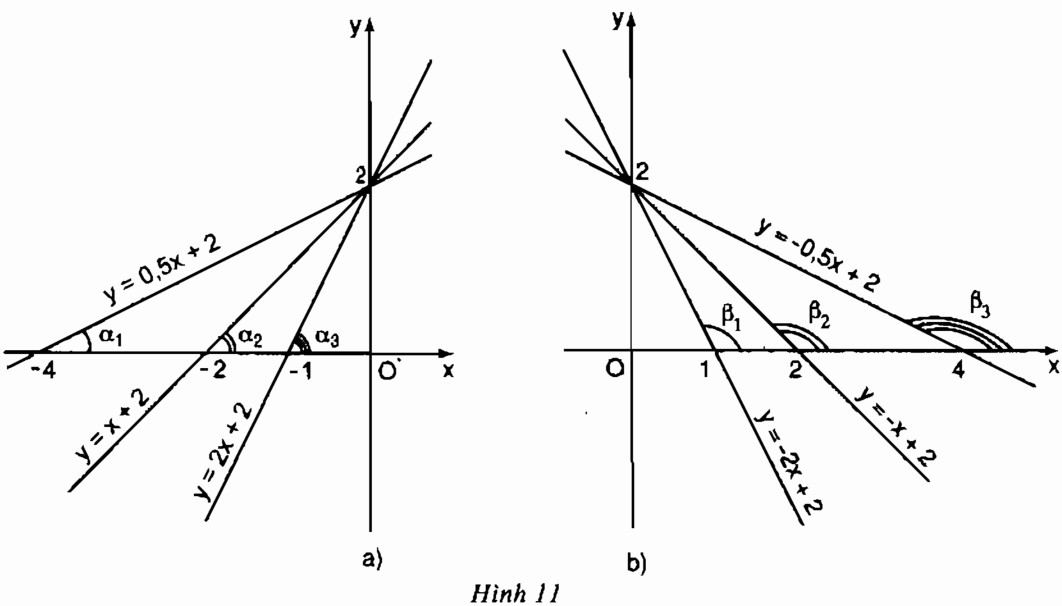


Hình 10

b) Hệ số góc

Với cách hiểu góc tạo bởi đường thẳng y = ax + b và trục Ox như trên, ta thấy rằng : Các đường thẳng song song với nhau sẽ tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

Từ đó suy ra : *Các đường thẳng có cùng hệ số* a *(*a *là hệ số của* x*) thì tạo với trục* Ox *các góc bằng nhau.*



Hình 11

? *Hình 11a) biểu diễn đồ thị của các hàm số (với hệ số* a > 0*) :*

y = 0,5x + 2 ; y = x + 2 ; y = 2x + 2.

Hình 11b) biểu diễn đồ thị của các hàm số (với hệ số $a < 0$*) :*

$y = -2x + 2$; $y = -x + 2$; $y = -0,5x + 2$.

a) Hãy so sánh các góc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *và so sánh các giá trị tương ứng của hệ số* a *trong các hàm số (trường hợp* $a > 0$*) rồi rút ra nhận xét.*

b) Cũng làm tương tự như câu a) với trường hợp $a < 0$.

Qua việc xét đồ thị của các hàm số đã nêu ở trên, ta có thể nói :

– Khi hệ số a dương ($a > 0$) thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc nhọn. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 90°.

– Khi hệ số a âm ($a < 0$) thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tù. Hệ số a càng lớn thì góc càng lớn nhưng vẫn nhỏ hơn 180°.

Vì có sự liên quan giữa hệ số a với góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox nên người ta gọi a là *hệ số góc* của đường thẳng $y = ax + b$.

➢ ***Chú ý.*** *Khi* $b = 0$, *ta có hàm số* $y = ax$. *Trong trường hợp này, ta cũng nói rằng* a *là hệ số góc của đường thẳng* $y = ax$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = 3x + 2$.

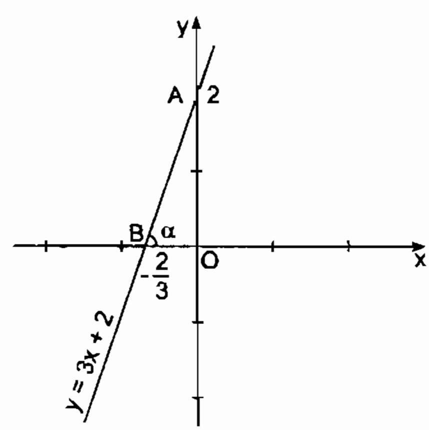
a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = 3x + 2$ và trục Ox (làm tròn đến phút).

Giải

a) Khi $x = 0$ thì $y = 2$, ta được điểm $A(0 ; 2)$.

Khi $y = 0$ thì $x = -\frac{2}{3}$, ta được điểm $B\left(-\frac{2}{3} ; 0\right)$.



Hình 12

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B, ta được đồ thị của hàm số đã cho (h.12).

b) Gọi góc tạo bởi đường thẳng $y = 3x + 2$ và trục Ox là α, ta có $\widehat{ABO} = \alpha$. Xét tam giác vuông OAB, ta có $\mathrm{tg}\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$ (3 chính là hệ số góc của đường thẳng y = 3x + 2). Bằng cách tra bảng hoặc tính trên máy tính, ta được $\alpha \approx 71^o34'$.

Ví dụ 2. Cho hàm số y = –3x + 3.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng y = –3x + 3 và trục Ox (làm tròn đến phút).

Giải

a) Khi x = 0 thì y = 3, ta được điểm A(0 ; 3).

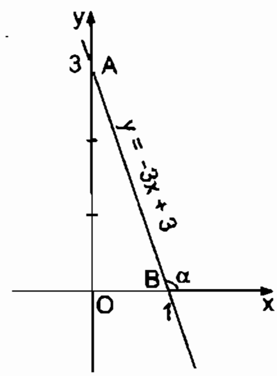
Khi y = 0 thì x = 1, ta được điểm B(1 ; 0).

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A và B, ta được đồ thị của hàm số đã cho (h.13).

b) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng y = –3x + 3 và trục Ox, ta có $\alpha = \widehat{ABx}$.

Xét tam giác vuông OAB, ta có

$\mathrm{tg}\,\widehat{OBA} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{3}{1} = 3$ (3 chính là giá trị tuyệt đối của hệ số góc –3 của đường thẳng y = –3x + 3).



Hình 13

Bằng cách tra bảng hoặc tính trên máy tính, ta được $\widehat{OBA} \approx 71^o34'$.

Vậy $\alpha = 180^o - \widehat{OBA} \approx 108^o26'$.

Bài tập

27. Cho hàm số bậc nhất y = ax + 3.

a) Xác định hệ số góc a, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm A(2 ; 6).

b) Vẽ đồ thị của hàm số.

28. Cho hàm số y = –2x + 3.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng y = –2x + 3 và trục Ox (làm tròn đến phút).

Luyện tập

29. Xác định hàm số bậc nhất $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = 2$ và đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1,5.

b) $a = 3$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(2 ; 2)$.

c) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ và đi qua điểm $B(1 ; \sqrt{3} + 5)$.

30. a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của các hàm số sau :

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \;; \qquad\qquad y = -x + 2.$$

b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2$ và $y = -x + 2$ với trục hoành theo thứ tự là A, B và gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C. Tính các góc của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét).

31. a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 1$; $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

b) Gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi các đường thẳng trên và trục Ox.

Chứng minh rằng $\text{tg}\alpha = 1$, $\text{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{tg}\gamma = \sqrt{3}$.

Tính số đo các góc α, β, γ.

Ôn tập chương II

Câu hỏi

1. Cho hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

a) Khi nào thì hàm số đồng biến ?

b) Khi nào thì hàm số nghịch biến ?

2. Khi nào thì hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ cắt nhau ? Song song với nhau ? Trùng nhau ?

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.

2. Hàm số thường được cho bằng bảng hoặc bằng công thức.

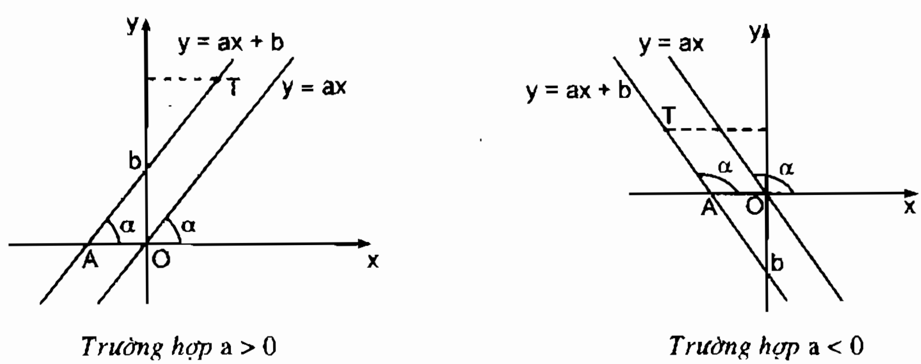
3. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x \,;\, f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

4. Hàm số có dạng $y = ax + b$ với $a \neq 0$ được gọi là hàm số bậc nhất đối với biến số x.

5. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x và có tính chất :

Hàm số đồng biến trên **R** khi $a > 0$, nghịch biến trên **R** khi $a < 0$.

6. Góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT, trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox, T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương (h.14).



Hình 14

7. a được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

8. Với hai đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d'), trong đó a và a' khác 0, ta có :

$a \neq a' \Leftrightarrow$ (d) và (d') cắt nhau ;

$a = a'$ và $b \neq b' \Leftrightarrow$ (d) và (d') song song với nhau ;

$a = a'$ và $b = b' \Leftrightarrow$ (d) và (d') trùng nhau.

Bài tập

32. a) Với những giá trị nào của m thì hàm số bậc nhất $y = (m - 1)x + 3$ đồng biến ?

b) Với những giá trị nào của k thì hàm số bậc nhất $y = (5 - k)x + 1$ nghịch biến ?

33. Với những giá trị nào của m thì đồ thị các hàm số $y = 2x + (3 + m)$ và $y = 3x + (5 - m)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung ?

34. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ $(a \neq 1)$ và $y = (3 - a)x + 1$ $(a \neq 3)$ song song với nhau.

35. Xác định k và m để hai đường thẳng sau đây trùng nhau :

$y = kx + (m - 2)$ $(k \neq 0)$; $\quad y = (5 - k)x + (4 - m)$ $(k \neq 5)$.

36. Cho hai hàm số bậc nhất $y = (k + 1)x + 3$ và $y = (3 - 2k)x + 1$.

a) Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng song song với nhau ?

b) Với giá trị nào của k thì đồ thị của hai hàm số là hai đường thẳng cắt nhau ?

c) Hai đường thẳng nói trên có thể trùng nhau được không ? Vì sao ?

37. a) Vẽ đồ thị hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$y = 0{,}5x + 2$ (1) ; $\quad y = 5 - 2x$ (2).

b) Gọi giao điểm của các đường thẳng $y = 0{,}5x + 2$ và $y = 5 - 2x$ với trục hoành theo thứ tự là A, B và gọi giao điểm của hai đường thẳng đó là C. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC và BC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là xentimét) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

d) Tính các góc tạo bởi các đường thẳng có phương trình (1) và (2) với trục Ox (làm tròn đến phút).

38. a) Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$y = 2x$ (1) ; $y = 0,5x$ (2) ; $y = -x + 6$ (3).

b) Gọi các giao điểm của đường thẳng có phương trình (3) với hai đường thẳng có phương trình (1) và (2) theo thứ tự là A và B. Tìm toạ độ của hai điểm A và B.

c) Tính các góc của tam giác OAB.

Hướng dẫn câu c)

Tính OA, OB rồi chứng tỏ tam giác OAB là tam giác cân.

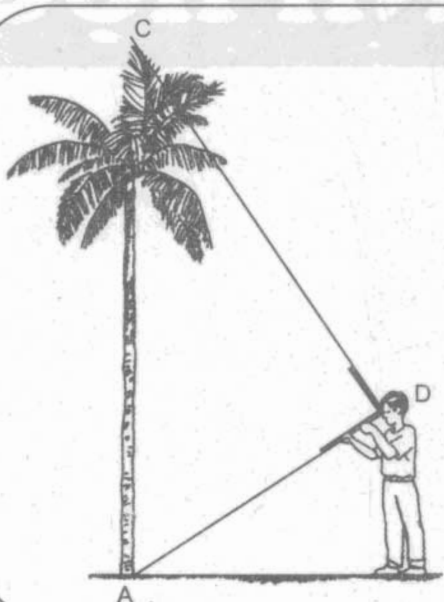
Tính $\widehat{AOB} = \widehat{AOx} - \widehat{BOx}$.

Phần HÌNH HỌC

Chương I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

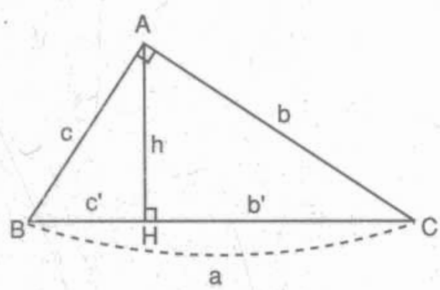
Trong tam giác vuông, nếu biết hai cạnh, hoặc một cạnh và một góc nhọn thì có thể tính được các góc và các cạnh còn lại của tam giác đó hay không ?

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông



Nhờ một hệ thức trong tam giác vuông, ta có thể "đo" được chiều cao của cây bằng một chiếc thước thợ.

Xét tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC = a, các cạnh góc vuông AC = b và AB = c. Gọi AH = h là đường cao ứng với cạnh huyền và CH = b', BH = c' lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC (h.1).



Hình 1

1. Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

ĐỊNH LÍ 1

> *Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.*

Cụ thể, trong tam giác ABC vuông tại A (h.1), ta có

$$b^2 = ab', c^2 = ac'. \qquad (1)$$

Chứng minh (h.1)

Xét hai tam giác vuông AHC và BAC. Hai tam giác vuông này có chung góc nhọn C nên chúng đồng dạng với nhau. Do đó $\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ suy ra $AC^2 = BC.HC$, tức là $b^2 = a.b'$. Tương tự, ta có $c^2 = a.c'$.

Ví dụ 1. (Định lí Py-ta-go – Một hệ quả của định lí 1)

Rõ ràng, trong tam giác vuông ABC (h.1), cạnh huyền $a = b' + c'$, do đó

$$b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a\,.\,a = a^2.$$

Như vậy, từ định lí 1, ta cũng suy ra được định lí Py-ta-go.

2. Một số hệ thức liên quan tới đường cao

ĐỊNH LÍ 2

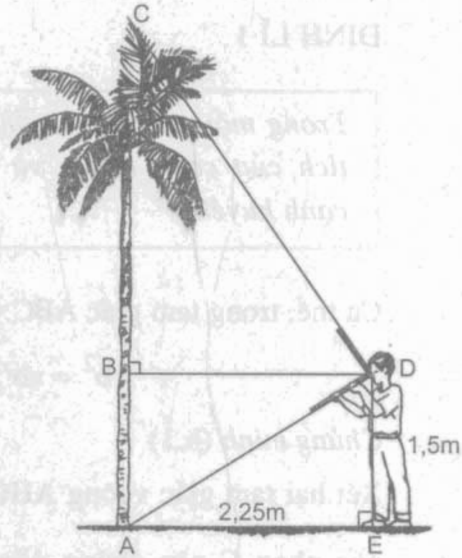
> *Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.*

Cụ thể, với các quy ước ở hình 1, ta có

$$h^2 = b'c'. \qquad (2)$$

?1 *Xét hình 1. Chứng minh* $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$. *Từ đó suy ra hệ thức (2).*

Ví dụ 2. Tính chiều cao của cây trong hình 2, biết rằng người đo đứng cách cây 2,25m và khoảng cách từ mắt người đo đến mặt đất là 1,5m.



Hình 2

Giải. Ta có tam giác ADC vuông tại D, DB là đường cao ứng với cạnh huyền AC và AB = 1,5m. Theo định lí 2, ta có

$$BD^2 = AB \,.\, BC$$

tức là

$$(2,25)^2 = 1,5 \,.\, BC,$$

suy ra

$$BC = \frac{(2,25)^2}{1,5} = 3,375 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của cây là

$$AC = AB + BC = 1,5 + 3,375 = 4,875 \text{ (m)}.$$

• Định lí 2 thiết lập mối quan hệ giữa đường cao ứng với cạnh huyền và các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền của một tam giác vuông. Định lí 3 dưới đây thiết lập mối quan hệ giữa đường cao này với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông.

ĐỊNH LÍ 3

Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

Với các kí hiệu trong hình 1, kết luận của định lí 3 có nghĩa là

$$bc = ah. \qquad (3)$$

Từ công thức tính diện tích tam giác, ta nhanh chóng suy ra hệ thức (3). Tuy nhiên, có thể chứng minh hệ thức (3) bằng cách khác.

?2 *Xét hình 1. Hãy chứng minh hệ thức (3) bằng tam giác đồng dạng.*

Nhờ định lí Py-ta-go, từ hệ thức (3), ta có thể suy ra một *hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông*. Thật vậy, ta có

$$ah = bc \Rightarrow a^2h^2 = b^2c^2 \Rightarrow (b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2 \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \qquad (4)$$

Hệ thức (4) được phát biểu thành định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 4

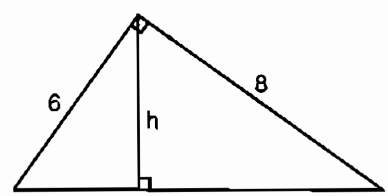
Trong một tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

Ví dụ 3. Cho tam giác vuông trong đó các cạnh góc vuông dài 6cm và 8cm. Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông.

Giải. (h.3)

Gọi đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông của tam giác này là h. Theo hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông, ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2}.$$



Hình 3

Từ đó suy ra $h^2 = \dfrac{6^2.8^2}{6^2 + 8^2} = \dfrac{6^2.8^2}{10^2}$, do đó $h = \dfrac{6.8}{10} = 4{,}8$ (cm).

➢ ***Chú ý.*** *Trong các ví dụ và các bài tập tính toán bằng số của chương này, các số đo độ dài ở mỗi bài nếu không ghi đơn vị ta quy ước là cùng đơn vị đo.*

Có thể em chưa biết

Các hệ thức $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ (1) và $h^2 = b'c'$ (2) (xem hình 1) còn được phát biểu dựa vào khái niệm trung bình nhân.

Hệ thức (1) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

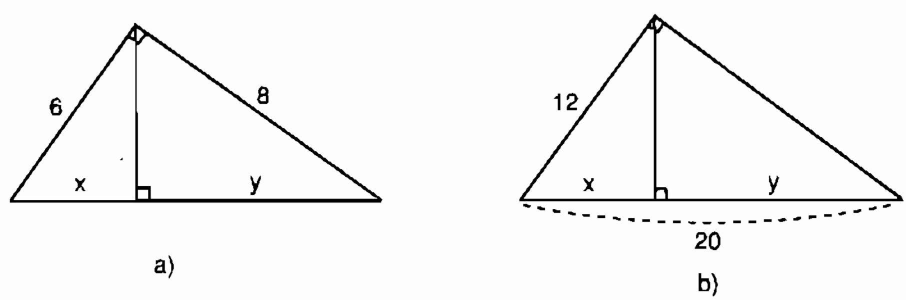
Tương tự, hệ thức (2) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của hai đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

Bài tập

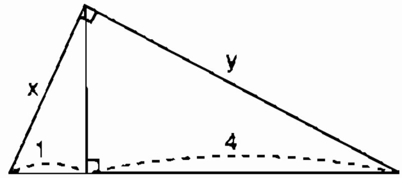
Hãy tính x và y trong mỗi hình sau :

1. (h.4a, b)



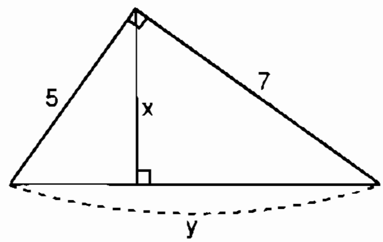
Hình 4

2. (h.5)



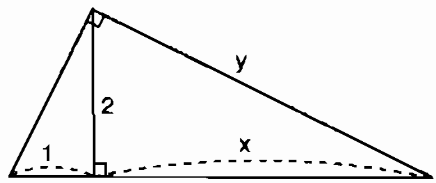
Hình 5

3. (h.6)



Hình 6

4. (h.7)



Hình 7

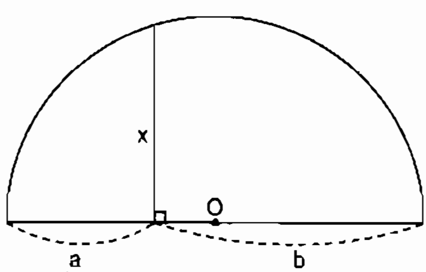
Luyện tập

5. Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

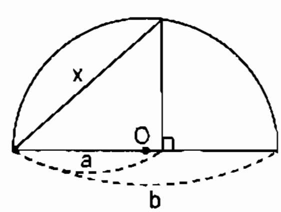
6. Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh góc vuông của tam giác này.

7. Người ta đưa ra hai cách vẽ đoạn trung bình nhân x của hai đoạn thẳng a, b (tức là $x^2 = ab$) như trong hai hình sau :

Cách 1 (h.8) Cách 2 (h.9)



Hình 8



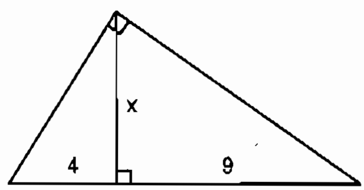
Hình 9

Dựa vào các hệ thức (1) và (2), hãy chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

Gợi ý. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác ấy là tam giác vuông.

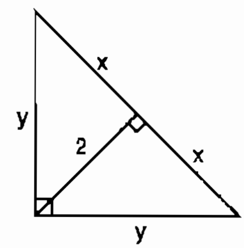
8. Tìm x và y trong mỗi hình sau :

a) (h.10)



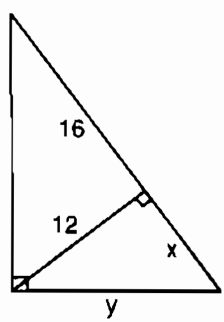
Hình 10

b) (h.11)



Hình 11

c) (h.12)



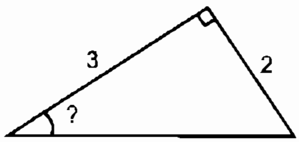
Hình 12

9. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh rằng

a) Tam giác DIL là một tam giác cân ;

b) Tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

§2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn



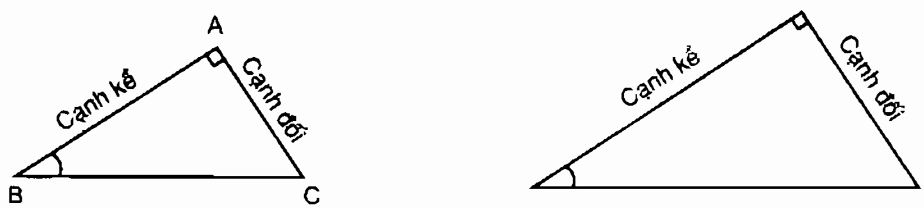
Trong một tam giác vuông, nếu biết tỉ số độ dài của hai cạnh thì có biết được độ lớn của các góc nhọn hay không ?

1. Khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

a) Mở đầu

Cho tam giác ABC vuông tại A. Xét góc nhọn B của nó. Nhắc lại rằng : Cạnh AB được gọi là *cạnh kề* của góc B, cạnh AC được gọi là *cạnh đối* của góc B.

Ta cũng đã biết : Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số đo của một góc nhọn, hoặc các tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của một góc nhọn trong mỗi tam giác đó là như nhau (h.13). Như vậy, tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của một góc nhọn trong tam giác vuông đặc trưng cho độ lớn của góc nhọn đó.



Hình 13

?1 *Xét tam giác* ABC *vuông tại* A *có* $\hat{B} = \alpha$. *Chứng minh rằng*

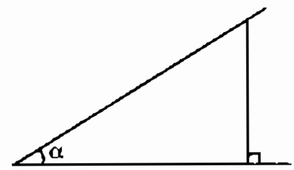
a) $\alpha = 45^o \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AB} = 1$;

b) $\alpha = 60^o \Leftrightarrow \dfrac{AC}{AB} = \sqrt{3}$.

Ngoài tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề, ta còn xét các tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối, cạnh đối và cạnh huyền, cạnh kề và cạnh huyền của một góc nhọn trong tam giác vuông. Các tỉ số này chỉ thay đổi khi độ lớn của góc nhọn đang xét thay đổi và ta gọi chúng là các *tỉ số lượng giác* của góc nhọn đó.

b) Định nghĩa

Cho góc nhọn α. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn α (ta có thể vẽ như sau : Vẽ góc α, từ một điểm bất kì trên một cạnh của góc α kẻ đường vuông góc với cạnh kia (h.14)), xác định cạnh đối và cạnh kề của góc α. Khi đó :



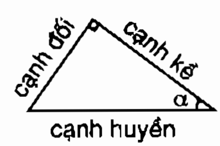
Hình 14

> *Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là* **sin** *của góc* α*, kí hiệu* $\sin\alpha$.
>
> *Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là* **côsin** *của góc* α*, kí hiệu* $\cos\alpha$.
>
> *Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là* **tang** *của góc* α*, kí hiệu* $\mathrm{tg}\,\alpha$ *(hay* $\tan\alpha$*).*
>
> *Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là* **côtang** *của góc* α*, kí hiệu* $\mathrm{cotg}\,\alpha$ *(hay* $\cot\alpha$ *).*

Như vậy

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$$



Nhận xét. Từ định nghĩa trên, dễ thấy các tỉ số lượng giác của một góc nhọn luôn luôn dương. Hơn nữa, ta có

$$\sin\alpha < 1, \cos\alpha < 1.$$

?2 *Cho tam giác* ABC *vuông tại* A *có* $\widehat{C} = \beta$. *Hãy viết các tỉ số lượng giác của góc* β.

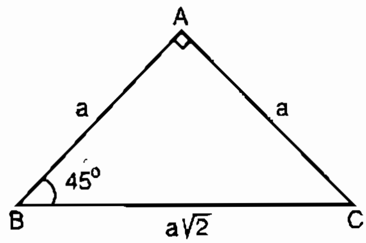
Ví dụ 1. (h.15). Ta có

$$\sin 45^o = \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ;$$

$$\cos 45^o = \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ;$$

$$tg\, 45^o = tg\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = 1 \ ;$$

$$cotg\, 45^o = cotg\, \widehat{B} = \frac{AB}{AC} = 1 .$$



Hình 15

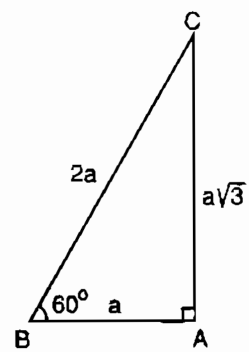
Ví dụ 2. (h.16). Ta có

$$\sin 60^o = \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ;$$

$$\cos 60^o = \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \ ;$$

$$tg\, 60^o = tg\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3} \ ;$$

$$cotg\, 60^o = cotg\, \widehat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

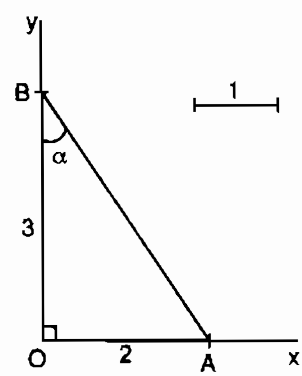


Hình 16

• Như vậy, cho góc nhọn α, ta tính được các tỉ số lượng giác của nó. Ngược lại, cho một trong các tỉ số lượng giác của góc nhọn α, ta có thể dựng được góc đó.

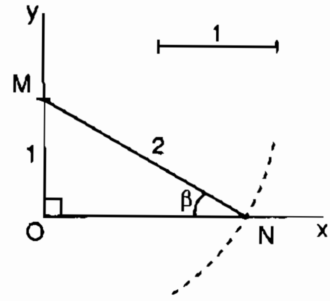
Ví dụ 3. Dựng góc nhọn α, biết $tg\, \alpha = \frac{2}{3}$.

Giải. (h.17) Dựng góc vuông xOy. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị. Trên tia Ox, lấy điểm A sao cho OA = 2 ; trên tia Oy, lấy điểm B sao cho OB = 3. Góc OBA bằng góc α cần dựng. Thật vậy, ta có $tg\, \alpha = tg\, \widehat{OBA} = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$.



Hình 17

Ví dụ 4. Hình 18 minh hoạ cách dựng góc nhọn β, khi biết $\sin\beta = 0{,}5$.



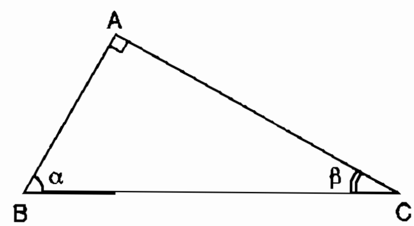
Hình 18

?3 *Hãy nêu cách dựng góc nhọn β theo hình 18 và chứng minh cách dựng đó là đúng.*

➤ ***Chú ý.*** *Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin\alpha = \sin\beta$ (hoặc $\cos\alpha = \cos\beta$, hoặc $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$, hoặc $\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta$) thì $\alpha = \beta$ vì chúng là hai góc tương ứng của hai tam giác vuông đồng dạng.*

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

?4 *Cho hình 19. Hãy cho biết tổng số đo của góc α và góc β. Lập các tỉ số lượng giác của góc α và góc β. Trong các tỉ số này, hãy cho biết các cặp tỉ số bằng nhau.*



Hình 19

Từ các cặp tỉ số bằng nhau đó, ta rút ra

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta,\ \mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta.$$

Vì hai góc phụ nhau bao giờ cũng bằng hai góc nhọn của một tam giác vuông nào đó, nên ta có định lí sau đây về quan hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

ĐỊNH LÍ

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Ví dụ 5. Theo ví dụ 1, ta có

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \mathrm{tg}\,45^\circ = \mathrm{cotg}\,45^\circ = 1.$$

Ví dụ 6. Ta có các góc 30° và 60° là hai góc phụ nhau. Do đó, theo ví dụ 2 và theo quan hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg}\, 30^\circ = \text{cotg}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \text{cotg}\, 30^\circ = \text{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3}.$$

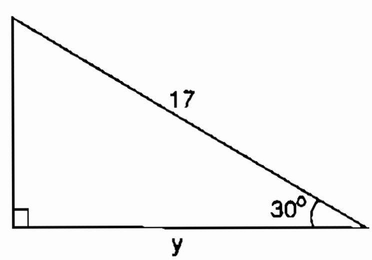
Qua ví dụ 5 và ví dụ 6, ta rút ra bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt như sau :

Tỉ số lượng giác \ α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{cotg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 7. Trong hình 20, cạnh y được tính như sau :

Ta có $\cos 30^\circ = \frac{y}{17}$,

do đó $y = 17\cos 30^\circ = \frac{17\sqrt{3}}{2} \approx 14,7.$



Hình 20

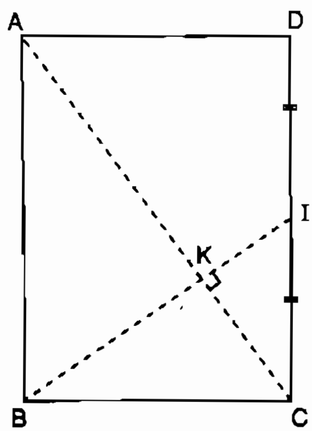
➢ ***Chú ý.*** *Từ nay khi viết các tỉ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác, ta bỏ kí hiệu " ∧ " đi. Chẳng hạn, viết* sin A *thay cho* sin $\widehat{A}$,...

Có thể em chưa biết

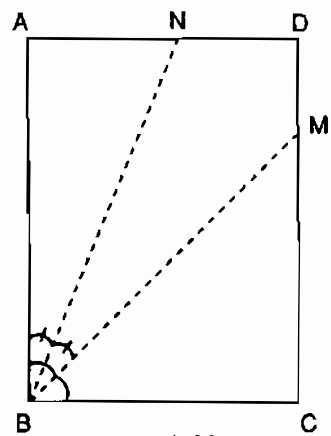
Bất ngờ về cỡ giấy A4
(21cm × 29,7cm)

• Tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của tờ giấy A4 xấp xỉ bằng $\sqrt{2}$.

• Giả sử tờ giấy A4 được minh hoạ trên các hình 21 và 22.
Nếu gấp tờ giấy theo các đường thẳng AC và BI (I là trung điểm của CD) thì ta sẽ có một góc hầu như vuông ! (h.21).
Nếu gấp tờ giấy theo đường phân giác BM của góc ABC, sau đó gấp tiếp theo đường phân giác BN của góc ABM thì điểm M sẽ trùng với điểm A ! (h.22)



Hình 21



Hình 22

Bằng hiểu biết của mình, em có thể giải thích được các điều lí thú này đấy.

Bài tập

10. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° rồi viết các tỉ số lượng giác của góc 34°.

11. Cho tam giác ABC vuông tại C, trong đó AC = 0,9m, BC = 1,2m. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

12. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° :

$$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \operatorname{cotg} 82^\circ, \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Luyện tập

13. Dựng góc nhọn α, biết :

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; b) $\cos\alpha = 0,6$; c) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$; d) $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{3}{2}$.

14. Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh rằng : Với góc nhọn α tuỳ ý, ta có

a) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\mathrm{tg}\,\alpha.\mathrm{cotg}\,\alpha = 1$;

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

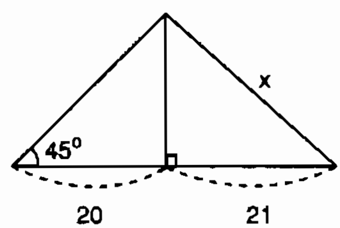
Gợi ý. Sử dụng định lí Py-ta-go.

15. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\cos B = 0,8$, hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Gợi ý. Sử dụng bài tập 14.

16. Cho tam giác vuông có một góc 60° và cạnh huyền có độ dài là 8. Hãy tìm độ dài của cạnh đối diện với góc 60°.

17. Tìm x trong hình 23.



Hình 23

§3. Bảng lượng giác

Dùng bảng lượng giác ta có thể nhanh chóng tìm được giá trị các tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho trước và ngược lại, tìm được số đo của một góc nhọn khi biết giá trị tỉ số lượng giác của góc đó.

Trong bài này, ta giới thiệu cấu tạo và cách dùng bảng lượng giác của V.M. Bra-đi-xơ.

1. Cấu tạo của bảng lượng giác

Bảng lượng giác bao gồm bảng VIII, bảng IX và bảng X của cuốn "Bảng số với 4 chữ số thập phân", Nhà xuất bản Giáo dục, tác giả V.M. Bra-đi-xơ.

Người ta lập bảng dựa trên tính chất sau đây của các tỉ số lượng giác :

Nếu hai góc nhọn α *và* β *phụ nhau* ($\alpha + \beta = 90^\circ$) *thì* $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$, $tg\,\alpha = cotg\,\beta$, $cotg\,\alpha = tg\,\beta$.

• Bảng VIII dùng để tìm giá trị sin và côsin của các góc nhọn đồng thời cũng dùng để tìm góc nhọn khi biết sin hoặc côsin của nó. Bảng VIII có cấu tạo như sau : Bảng được chia thành 16 cột và các hàng, trong đó :

Cột 1 và cột 13 ghi các số nguyên độ. Kể từ trên xuống dưới, cột 1 ghi số độ tăng dần từ 0° đến 90°, cột 13 ghi số độ giảm dần từ 90° đến 0°.

Từ cột 2 đến cột 12, hàng 1 và hàng cuối ghi các số phút là bội của 6 từ 0' đến 60' (kể từ trái sang phải, hàng 1 ghi theo chiều tăng, hàng cuối ghi theo chiều giảm) ; các hàng giữa ghi giá trị sin, côsin của các góc tương ứng.

Ba cột cuối ghi các giá trị dùng để hiệu chính đối với các góc sai khác 1', 2', 3'.

• Bảng IX dùng để tìm giá trị tang của các góc từ 0° đến 76° và côtang của các góc từ 14° đến 90° và ngược lại, dùng để tìm góc nhọn khi biết tang hoặc côtang của nó. Bảng IX có cấu tạo tương tự như bảng VIII.

• Bảng X dùng để tìm giá trị tang của các góc từ 76° đến $89^\circ59'$ và côtang của các góc từ 1' đến 14° và ngược lại, dùng để tìm góc nhọn khi biết tang hoặc côtang của nó. Bảng X không có phần hiệu chính.

Nhận xét. Quan sát các bảng nói trên ta thấy : Khi góc α tăng từ 0° đến 90° ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) thì $\sin\alpha$ và $tg\,\alpha$ tăng còn $\cos\alpha$ và $cotg\,\alpha$ giảm.

Nhận xét này là cơ sở cho việc sử dụng phần hiệu chính của Bảng VIII và Bảng IX.

2. Cách dùng bảng

a) Tìm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho trước

Khi tìm tỉ số lượng giác của một góc nhọn bằng bảng VIII và bảng IX, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1. Tra số độ ở cột 1 đối với sin và tang (cột 13 đối với côsin và côtang).

Bước 2. Tra số phút ở hàng 1 đối với sin và tang (hàng cuối đối với côsin và côtang).

Bước 3. Lấy giá trị tại giao của hàng ghi số độ và cột ghi số phút.

Trong trường hợp số phút không là bội của 6 thì lấy cột phút gần nhất với số phút phải xét, số phút chênh lệch còn lại xem ở phần hiệu chính.

Ví dụ 1. Tìm $\sin 46^o12'$.

Tra Bảng VIII : Số độ tra ở cột 1, số phút tra ở hàng 1. Lấy giá trị tại giao của hàng ghi 46^o và cột ghi $12'$ làm phần thập phân (mẫu 1). Vậy $\sin 46^o12' \approx 0{,}7218$.

SIN

A	...	12'	...
.			
.			
.			
46^o		7218	
.			
.			
.			

Mẫu 1

Ví dụ 2. Tìm $\cos 33^o14'$.

Tra Bảng VIII : Số độ tra ở cột 13, số phút tra ở hàng cuối. Tại giao của hàng ghi 33^o và cột ghi số phút gần nhất với 14' - đó là cột ghi 12', ta thấy 8368. Vậy $\cos 33^o12' \approx 0{,}8368$. (mẫu 2).

	8368		33^o		3	
			.			
			.			
			.			
...	12'	...	A	1'	2'	3'

CÔSIN

Mẫu 2

Ta có

$\cos 33^o14' = \cos(33^o12' + 2')$.

Theo nhận xét ở phần 1, $\cos 33^o14' < \cos 33^o12'$, nên giá trị của $\cos 33^o14'$ được suy ra từ giá trị $\cos 33^o12'$ bằng cách trừ đi phần hiệu chính tương ứng (đối với sin thì cộng thêm). Tại giao của hàng ghi 33^o và cột ghi 2' (ở phần hiệu chính), ta thấy số 3. Ta dùng số 3 này để hiệu chính chữ số cuối ở số 0,8368 như sau :

$$\cos 33^o14' \approx 0{,}8368 - 0{,}0003$$
$$= 0{,}8365.$$

Ví dụ 3. Tìm $\operatorname{tg} 52^o18'$.

Tra bảng IX : Số độ tra ở cột 1, số phút tra ở hàng 1. Lấy giá trị tại giao của hàng

TANG

A	0'	...	18'	...
50^o	1,1918			
51^o				
52^o			2938	
53^o				
54^o				

Mẫu 3

ghi 52^0 và cột ghi 18' làm phận thập phân. Phần nguyên được lấy theo phần nguyên của giá trị gần nhất đã cho trong bảng (mẫu 3). Vậy

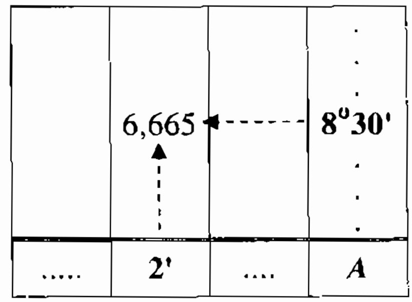
$$\text{tg}\,52^0 18' \approx 1{,}2938.$$

?1 *Sử dụng bảng, tìm* $\text{cotg}\,47^0 24'$.

Ví dụ 4. Tìm $\text{cotg}\,8^0 32'$.

Sử dụng bảng X, cột cuối, hàng cuối. Lấy giá trị tại giao của hàng ghi $8^0 30'$ với cột ghi 2' (mẫu 4). Vậy

$$\text{cotg}\,8^0 32' \approx 6{,}665.$$



CÔTANG

Mẫu 4

?2 *Sử dụng bảng, tìm* $\text{tg}\,82^0 13'$.

➢ ***Chú ý***

1) Khi sử dụng Bảng VIII hay Bảng IX, đối với những góc có số phút khác bội của 6, ta dùng phần hiệu chính theo nguyên tắc :

– Đối với sin và tang, góc lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) thì cộng thêm (hoặc trừ đi) phần hiệu chính tương ứng.

– Đối với côsin và côtang thì ngược lại, góc lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) thì trừ đi (hoặc cộng thêm) phần hiệu chính tương ứng (xem ví dụ 2).

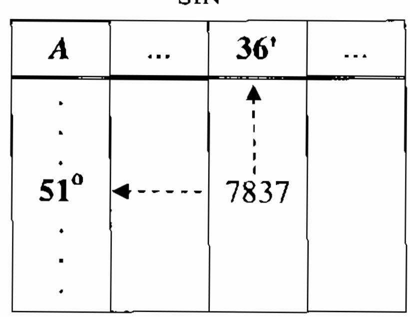
2) Có thể chuyển từ việc tìm $\cos\alpha$ *sang tìm* $\sin(90^0 - \alpha)$ *và tìm* $\text{cotg}\,\alpha$ *sang tìm* $\text{tg}\,(90^0 - \alpha)$..

b) Tìm số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của góc đó

Ví dụ 5. Tìm góc nhọn α (làm tròn đến phút), biết $\sin\alpha = 0{,}7837$.

Tra Bảng VIII : Tìm số 7837 ở trong bảng, dóng sang cột 1 và hàng 1, ta thấy 7837 nằm ở giao của hàng ghi 51^0 và cột ghi 36' (mẫu 5). Vậy $\alpha \approx 51^0 36'$.

SIN



Mẫu 5

?3 *Sử dụng bảng tìm góc nhọn α, biết* cotg $\alpha = 3{,}006$.

➢ ***Chú ý.*** *Khi biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn, nói chung, ta tìm được góc nhọn sai khác không đến 6'. Tuy nhiên, thông thường trong tính toán ta làm tròn đến độ.*

Ví dụ 6. Tìm góc nhọn α (làm tròn đến độ), biết $\sin\alpha = 0{,}4470$.

Tra bảng VIII, ta không tìm thấy số 4470 ở trong bảng. Tuy nhiên, ta tìm thấy hai số gần với 4470 nhất, đó là 4462 và 4478 (mẫu 6). Ta có

$0{,}4462 < 0{,}4470 < 0{,}4478$ hay

$\sin 26^\circ 30' < \sin\alpha < \sin 26^\circ 36'$.

Theo nhận xét ở mục 1 thì $26^\circ 30' < \alpha < 26^\circ 36'$. Từ đó suy ra $\alpha \approx 27^\circ$.

SIN

A	...	30'	36'	...
⋮		↑	↑	
26°	←----	4462	4478	
⋮				

Mẫu 6

?4 *Tìm góc nhọn α (làm tròn đến độ), biết* $\cos\alpha = 0{,}5547$.

Bài đọc thêm

TÌM TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ GÓC BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI CASIO *fx-220*

Ngoài chức năng thực hiện bốn phép toán cộng, trừ, nhân, chia với số thập phân, máy tính CASIO *fx-220* (h. 24) còn có nhiều chức năng khác, trong đó có chức năng tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn và tính số đo của góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của nó. Trong chương trình THCS, ta chỉ học số đo góc là độ, phút, giây nên sau khi bật máy (nhấn phím $\boxed{\text{AC}}$ hay $\boxed{\text{ON}}$) ta chọn kiểu độ (Mode degree) bằng cách nhấn liên tiếp hai phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{4}$. Khi đó, ở phía trên của màn hình xuất hiện chữ DEG.

Hình 24

Khi tính toán, ta thường lấy kết quả với 4 chữ số thập phân nên ta nhấn liên tiếp ba phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$. Khi đó, ở phía trên của màn hình xuất hiện chữ FIX.

Trong các ví dụ sau đây, chỉ khi trên màn hình xuất hiện chữ DEG và chữ FIX, ta mới bắt đầu tính toán.

Để nhập độ, phút, giây, ta dùng phím $\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}$.

Để hiển thị độ, phút, giây, ta dùng hai phím $\boxed{\text{SHIFT}}$, $\boxed{\leftarrow}$.

Ví dụ 1. Để hiển thị $14^{\circ}21'$, ta nhấn lần lượt các phím

$$\boxed{1}\quad\boxed{4}\quad\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\quad\boxed{2}\quad\boxed{1}\quad\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\quad\boxed{\text{SHIFT}}\quad\boxed{\leftarrow}.$$

Khi đó trên màn hình sẽ hiện ra $14^{\circ}21^{\circ}0$. Đó là kí hiệu của $14^{\circ}21'$. Khi chỉ cần nạp vào máy mà không cần hiển thị, ta bỏ đi hai phím cuối cùng.

a) Tìm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho trước

Ta sử dụng các phím $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$.

Ví dụ 2. Tìm $\cos 25^{\circ}13'$.

Nhấn lần lượt các phím

$$\boxed{2}\quad\boxed{5}\quad\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\quad\boxed{1}\quad\boxed{3}\quad\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\quad\boxed{\cos}$$

Khi đó trên màn hình hiện số 0.9047, nghĩa là $\cos 25^{\circ}13' \approx 0{,}9047$.

Ví dụ 3. Tính $\text{cotg}\ 56^{\circ}25'$.

Ta đã biết $\text{cotg}\ 56^{\circ}25' = \dfrac{1}{\text{tg}\ 56^{\circ}25'}$, nên để tìm $\text{cotg}\ 56^{\circ}25'$ ta lần lượt nhấn các phím

$$\boxed{5}\quad\boxed{6}\quad\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\quad\boxed{2}\quad\boxed{5}\quad\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\quad\boxed{\tan}\quad\boxed{\text{SHIFT}}\quad\boxed{1/x}$$

Khi đó trên màn hình hiện số 0.6640, nghĩa là $\text{cotg}\ 56^{\circ}25' \approx 0{,}6640$.

b) Tìm số đo của góc nhọn khi biết tỉ số lượng giác của góc đó

Nhấn liên tiếp các phím

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin^{-1}}$ để tìm α khi biết $\sin\alpha$;

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ để tìm α khi biết $\cos\alpha$;

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan^{-1}}$ để tìm α khi biết $\text{tg}\,\alpha$.

Ví dụ 4. Tìm góc nhọn x, biết $\sin x = 0{,}2836$.
Nhấn lần lượt các phím

$\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{3}\ \boxed{6}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin^{-1}}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\leftarrow}$.

Khi đó trên màn hình xuất hiện 16 ⌐ 28 ⌐ 30.66 nghĩa là $16^o28'30{,}66''$.

Làm tròn đến phút, ta lấy $x \approx 16^o29'$.

Làm tròn đến độ, ta lấy $x \approx 16^o$.

➢ ***Chú ý***

1) Nếu phải tìm góc nhọn x *khi biết* $\operatorname{cotg} x$, *ta có thể chuyển thành bài toán tìm góc nhọn* x *khi biết* $\operatorname{tg} x$ *vì* $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}$.

Ví dụ 5. Tìm góc nhọn x (làm tròn đến phút), biết rằng $\operatorname{cotg} x = 2{,}675$.
Nhấn lần lượt các phím

$\boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{1/x}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan^{-1}}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\leftarrow}$.

Khi đó trên màn hình xuất hiện 20 ⌐ 29 ⌐ 50.43 nghĩa là $20^o29'50{,}43''$.

Làm tròn đến phút, ta lấy $x \approx 20^o30'$.

2) Sau khi tìm xong một tỉ số lượng giác hoặc một góc, ta nhấn phím $\boxed{\text{AC}}$ *để chuyển sang phép tính khác.*

3) Nếu không phải tính toán nữa, ta nhấn phím $\boxed{\text{OFF}}$ *để tắt máy.*

4) Ta có thể dùng các máy tính khác có các chức năng tương tự như máy CASIO *fx-220, chẳng hạn máy tính* SHARP *EL-500M,...*

Bài tập

18. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) :

a) $\sin 40^o12'$; b) $\cos 52^o54'$;

c) $\operatorname{tg} 63^o36'$; d) $\operatorname{cotg} 25^o18'$.

19. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm số đo của góc nhọn x (làm tròn đến phút), biết rằng :

a) $\sin x = 0{,}2368$; b) $\cos x = 0{,}6224$;

c) $\operatorname{tg} x = 2{,}154$; d) $\operatorname{cotg} x = 3{,}251$.

Luyện tập

20. Dùng bảng lượng giác (có sử dụng phần hiệu chính) hoặc máy tính bỏ túi, hãy tìm các tỉ số lượng giác sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) :

a) $\sin 70^\circ 13'$; b) $\cos 25^\circ 32'$; c) $\operatorname{tg} 43^\circ 10'$; d) $\operatorname{cotg} 32^\circ 15'$.

21. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tìm góc nhọn x (làm tròn kết quả đến độ), biết rằng :

a) $\sin x = 0{,}3495$; b) $\cos x = 0{,}5427$; c) $\operatorname{tg} x = 1{,}5142$; d) $\operatorname{cotg} x = 3{,}163$.

22. So sánh

a) $\sin 20^\circ$ và $\sin 70^\circ$; b) $\cos 25^\circ$ và $\cos 63^\circ 15'$;

c) $\operatorname{tg} 73^\circ 20'$ và $\operatorname{tg} 45^\circ$; d) $\operatorname{cotg} 2^\circ$ và $\operatorname{cotg} 37^\circ 40'$.

23. Tính

a) $\dfrac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$; b) $\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{cotg} 32^\circ$.

24. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

a) $\sin 78^\circ$, $\cos 14^\circ$, $\sin 47^\circ$, $\cos 87^\circ$;

b) $\operatorname{tg} 73^\circ$, $\operatorname{cotg} 25^\circ$, $\operatorname{tg} 62^\circ$, $\operatorname{cotg} 38^\circ$.

25. So sánh

a) $\operatorname{tg} 25^\circ$ và $\sin 25^\circ$; b) $\operatorname{cotg} 32^\circ$ và $\cos 32^\circ$;

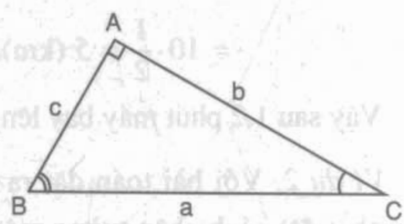
c) $\operatorname{tg} 45^\circ$ và $\cos 45^\circ$; d) $\operatorname{cotg} 60^\circ$ và $\sin 30^\circ$.

§4. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Một chiếc thang dài 3m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu để nó tạo được với mặt đất một góc "an toàn" 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng) ?

1. Các hệ thức

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c (h.25).



Hình 25

?1 *Viết các tỉ số lượng giác của góc* B *và góc* C. *Từ đó hãy tính mỗi cạnh góc vuông theo :*

a) Cạnh huyền và các tỉ số lượng giác của góc B *và góc* C *;*

b) Cạnh góc vuông còn lại và các tỉ số lượng giác của góc B *và góc* C.

Từ các kết quả trên, ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

> *Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :*
>
> *a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề ;*
>
> *b) Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.*

Như vậy, trong tam giác ABC vuông tại A (h.25), ta có các hệ thức

$b = a.\sin B = a.\cos C$; $\qquad$ $b = c.\mathrm{tg}B = c.\mathrm{cotg}\,C$;

$c = a.\sin C = a.\cos B$; $\qquad$ $c = b.\mathrm{tg}C = b.\mathrm{cotg}\,B$.

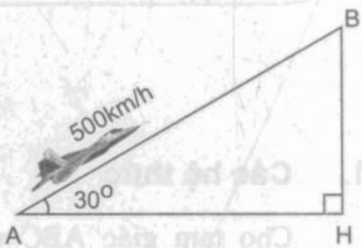
Ví dụ 1. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° (h. 26). Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu kilômét theo phương thẳng đứng ?

Giải. Giả sử trong hình 26, AB là đoạn đường máy bay bay lên trong 1,2 phút thì BH chính là độ cao máy bay đạt được sau 1,2 phút đó.

Vì 1,2 phút = $\frac{1}{50}$ giờ nên AB = $\frac{500}{50} = 10$ (km).

Do đó

$$\begin{aligned} BH &= AB.\sin A \\ &= 10.\sin 30^{\circ} \\ &= 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ (km)}. \end{aligned}$$



Hình 26

Vậy sau 1,2 phút máy bay lên cao được 5km.

Ví dụ 2. Với bài toán đặt ra trong khung ở đầu §4, chân chiếc thang cần phải đặt cách chân tường một khoảng là

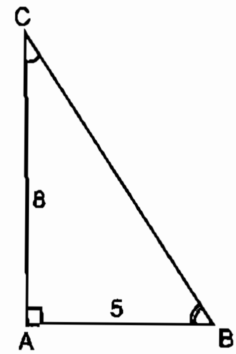
$$3.\cos 65^{\circ} \approx 1,27 \text{ (m)}.$$

2. Áp dụng giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của nó. Bài toán đặt ra như thế gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

Lưu ý rằng, trong kết quả của các ví dụ và các bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta làm tròn đến độ (với số đo góc) và đến chữ số thập phân thứ ba (với số đo độ dài).

Ví dụ 3. Cho tam giác vuông ABC với các cạnh góc vuông AB = 5, AC = 8 (h.27). Hãy giải tam giác vuông ABC.



Hình 27

Giải. Theo định lí Py-ta-go, ta có

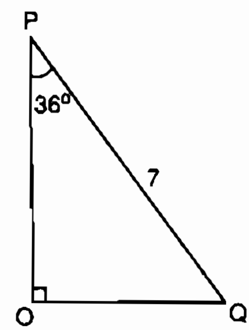
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} \approx 9{,}434.$$

Mặt khác

$$\operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Tra bảng hay dùng máy tính bỏ túi, ta tìm được $\widehat{C} \approx 32^\circ$, do đó $\widehat{B} \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

?2 *Trong ví dụ 3, hãy tính cạnh* BC *mà không áp dụng định lí Py-ta-go.*



Hình 28

Ví dụ 4. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^\circ$, PQ = 7 (h.28). Hãy giải tam giác vuông OPQ.

Giải. Ta có $\widehat{Q} = 90^\circ - \widehat{P} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

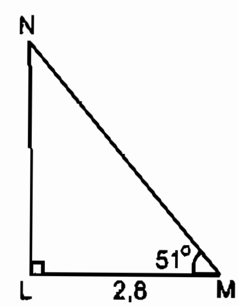
Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$OP = PQ.\sin Q = 7.\sin 54^\circ \approx 5{,}663\ ;$$

$$OQ = PQ.\sin P = 7.\sin 36^\circ \approx 4{,}114.$$

?3 *Trong ví dụ 4, hãy tính các cạnh* OP, OQ *qua côsin của các góc* P *và* Q.

Ví dụ 5. Cho tam giác LMN vuông tại L có $\widehat{M} = 51^\circ$, LM = 2,8 (h.29). Hãy giải tam giác vuông LNM.



Hình 29

Giải. Ta có

$$\widehat{N} = 90^o - \widehat{M} = 90^o - 51^o = 39^o.$$

Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$LN = LM.\,tg\,M = 2,8.tg\,51^o \approx 3,458\ ;$$

$$MN = \frac{LM}{\cos 51^o} \approx \frac{2,8}{0,6293} \approx 4,449.$$

Nhận xét. Cũng như trong ví dụ 3, ở đây ta có thể tính MN bằng cách áp dụng định lí Py-ta-go. Tuy nhiên khi đó, trong việc sử dụng bảng số và máy tính, ta sẽ gặp các thao tác phức tạp hơn. Do đó, khi giải tam giác vuông, trong nhiều trường hợp, nếu đã biết hai cạnh ta nên tìm một góc nhọn trước ; sau đó dùng các hệ thức giữa cạnh và góc để tính cạnh thứ ba. Cách này có thể giúp cho việc thực hiện các phép toán bằng bảng số và máy tính đơn giản hơn.

Bài tập

26. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 34^o và bóng của một tháp trên mặt đất dài 86m (h.30). Tính chiều cao của tháp (làm tròn đến mét).

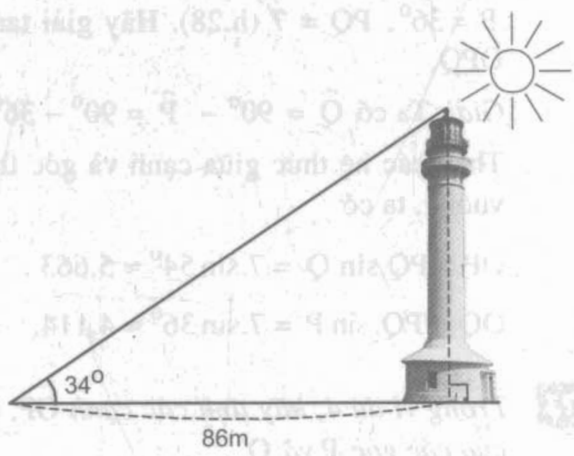
27. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết rằng

a) b = 10cm, $\widehat{C} = 30^o$;

b) c = 10cm, $\widehat{C} = 45^o$;

c) a = 20cm, $\widehat{B} = 35^o$;

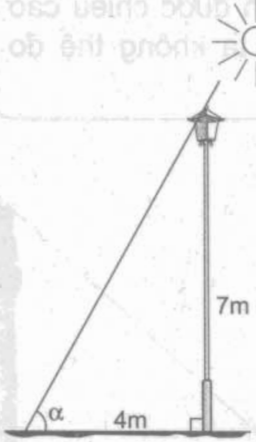
d) c = 21cm, b = 18cm.



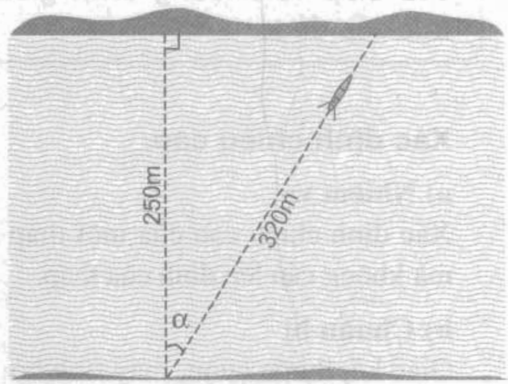
Hình 30

Luyện tập

28. Một cột đèn cao 7m có bóng trên mặt đất dài 4m. Hãy tính góc (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất (góc α trong hình 31).



Hình 31



Hình 32

29. Một khúc sông rộng khoảng 250m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng 320m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò lệch đi một góc bằng bao nhiêu độ ? (góc α trong hình 32).

30. Cho tam giác ABC, trong đó BC = 11cm, $\widehat{ABC} = 38^o$, $\widehat{ACB} = 30^o$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC. Hãy tính :

a) Đoạn thẳng AN ;

b) Cạnh AC.

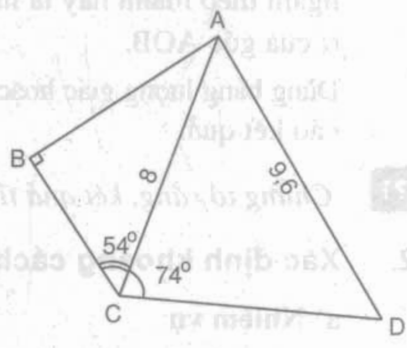
Gợi ý. Kẻ BK vuông góc với AC.

31. Trong hình 33, AC = 8cm, AD = 9,6cm, $\widehat{ABC} = 90^o$, $\widehat{ACB} = 54^o$ và $\widehat{ACD} = 74^o$.

Hãy tính :

a) AB ;

b) $\widehat{ADC}$.



Hình 33

32. Một con thuyền với vận tốc 2km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của con thuyền tạo với bờ một góc 70^o. Từ đó đã có thể tính được chiều rộng của khúc sông chưa ? Nếu có thể hãy tính kết quả (làm tròn đến mét).

§5. Ứng dụng thực tế các tỉ số lượng giác của góc nhọn. Thực hành ngoài trời

Nhờ tỉ số lượng giác của góc nhọn, có thể tính được chiều cao của tháp và khoảng cách giữa hai điểm mà ta không thể đo trực tiếp được.

1. Xác định chiều cao

a) Nhiệm vụ

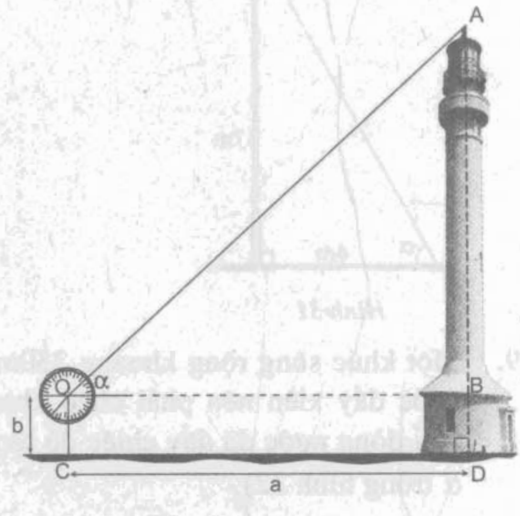
Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp.

b) Chuẩn bị

Giác kế, thước cuộn, máy tính bỏ túi (hoặc bảng lượng giác).

c) Hướng dẫn thực hiện (h.34)

Đặt giác kế thẳng đứng cách chân tháp một khoảng a (CD = a), giả sử chiều cao của giác kế là b (OC = b).



Hình 34

Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh này ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo α của góc AOB.

Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tính $\mathrm{tg}\alpha$. Tính tổng $b + a.\mathrm{tg}\alpha$ và báo kết quả.

?1 *Chứng tỏ rằng, kết quả tính được ở trên chính là chiều cao* AD *của tháp.*

2. Xác định khoảng cách

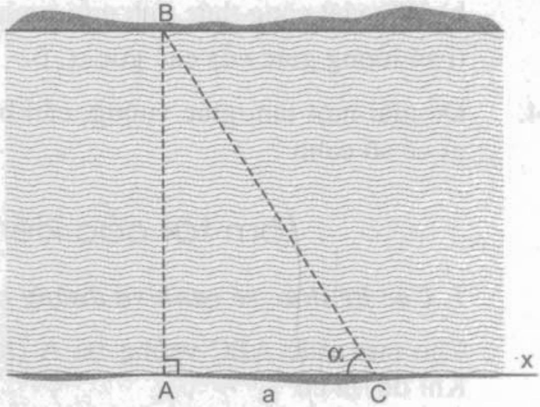
a) Nhiệm vụ

Xác định chiều rộng của một khúc sông mà việc đo đạc chỉ tiến hành tại một bờ sông.

b) Chuẩn bị

Ê-ke đạc, giác kế, thước cuộn, máy tính bỏ túi hoặc bảng lượng giác.

c) **Hướng dẫn thực hiện** (h.35)



Hình 35

Ta coi hai bờ sông song song với nhau.

Chọn một điểm B phía bên kia sông. Lấy một điểm A bên này sông sao cho AB vuông góc với các bờ sông.

Dùng ê-ke đạc kẻ đường thẳng Ax phía bên này sông sao cho $Ax \perp AB$.

Lấy điểm C trên Ax, giả sử AC = a.

Dùng giác kế đo góc ACB, giả sử $\widehat{ACB} = \alpha$.

Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng lượng giác để tính $tg\alpha$.

Tính tích $a.tg\alpha$ và báo kết quả.

?2 *Vì sao kết quả trên lại là chiều rộng* AB *của khúc sông ?*

Ôn tập chương I

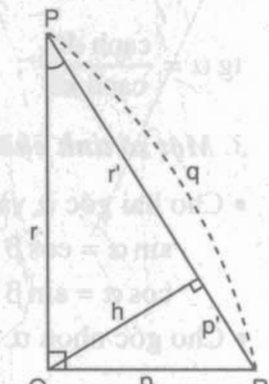
Câu hỏi

1. Cho hình 36. Hãy viết hệ thức giữa :

a) Cạnh huyền, cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ;

b) Các cạnh góc vuông p, r và đường cao h ;

c) Đường cao h và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền p', r'.



Hình 36

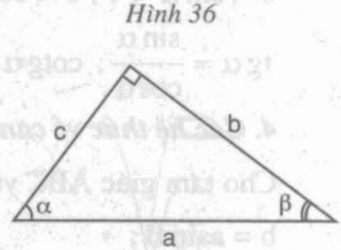
2. Cho hình 37.

a) Hãy viết công thức tính các tỉ số lượng giác của góc α.

b) Hãy viết hệ thức giữa các tỉ số lượng giác của góc α và các tỉ số lượng giác của góc β.

3. Xem hình 37.

a) Hãy viết công thức tính các cạnh góc vuông b và c theo cạnh huyền a và tỉ số lượng giác của các góc α, β ;



Hình 37

b) Hãy viết công thức tính mỗi cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông kia và tỉ số lượng giác của các góc α, β.

4. Để giải một tam giác vuông, cần biết ít nhất mấy góc và cạnh ? Có lưu ý gì về số cạnh ?

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

1. Các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

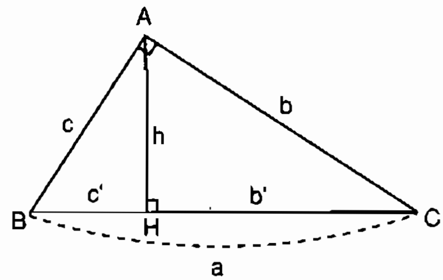
Cho tam giác ABC vuông tại A (h.38). Khi đó, ta có

1) $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$;

2) $h^2 = b'c'$;

3) $ha = bc$;

4) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

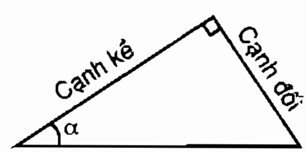


Hình 38

2. Định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn (h.39)

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}\ ;\quad \cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}\ ;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}\ ;\qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$$



Hình 39

3. Một số tính chất của các tỉ số lượng giác

- Cho hai góc α và β phụ nhau. Khi đó

$\sin\alpha = \cos\beta$; $\quad\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta$;

$\cos\alpha = \sin\beta$; $\quad\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$.

- Cho góc nhọn α. Ta có

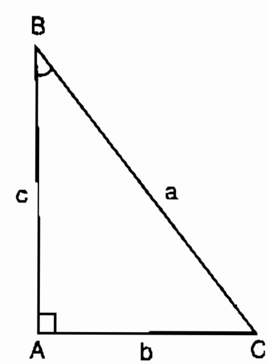
$0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\mathrm{tg}\,\alpha.\mathrm{cotg}\,\alpha = 1$.

4. Các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A (h.40). Khi đó

$b = a\sin B$; $\qquad c = a\sin C$;



Hình 40

$b = a\cos C$; $\qquad c = a\cos B$;

$b = \text{ctg } B$; $\qquad c = b\,\text{tg } C$;

$b = c\,\text{cotg } C$; $\qquad c = b\,\text{cotg } B$.

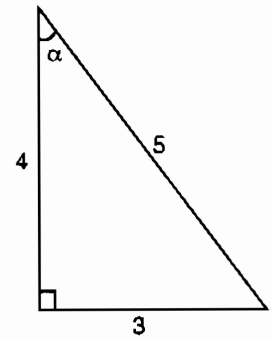
Bài tập

33. Chọn kết quả đúng trong các kết quả dưới đây :

a) Trong hình 41, $\sin\alpha$ bằng

(A) $\frac{5}{3}$; (B) $\frac{5}{4}$;

(C) $\frac{3}{5}$; (D) $\frac{3}{4}$.

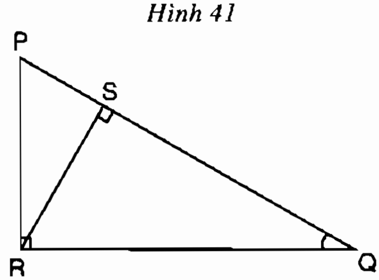


Hình 41

b) Trong hình 42, $\sin Q$ bằng

(A) $\frac{PR}{RS}$; (B) $\frac{PR}{QR}$;

(C) $\frac{PS}{SR}$; (D) $\frac{SR}{QR}$.

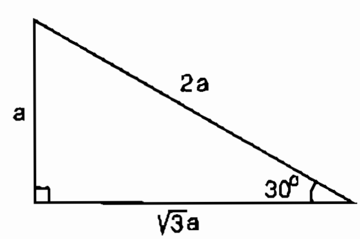


Hình 42

c) Trong hình 43, $\cos 30^\circ$ bằng

(A) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; (B) $\frac{a}{\sqrt{3}}$;

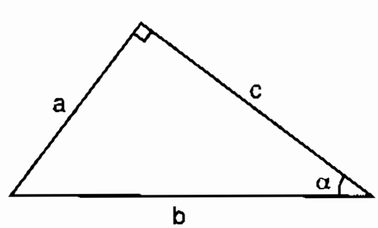
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $2\sqrt{3}\,a^2$.



Hình 43

34. a) Trong hình 44, hệ thức nào trong các hệ thức sau là đúng ?

(A) $\sin\alpha = \frac{b}{c}$; (B) $\text{cotg}\,\alpha = \frac{b}{c}$;



Hình 44

(C) $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{c}$; (D) $\text{cotg}\alpha = \frac{a}{c}$.

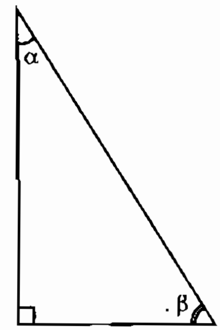
b) Trong hình 45, hệ thức nào trong các hệ thức sau *không đúng* ?

(A) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

(B) $\sin\alpha = \cos\beta$;

(C) $\cos\beta = \sin(90^\circ - \alpha)$;

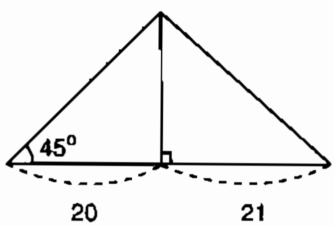
(D) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



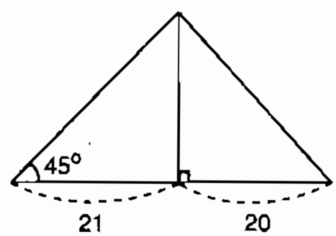
Hình 45

35. Tỉ số giữa hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông bằng 19 : 28. Tìm các góc của nó.

36. Cho tam giác có một góc bằng 45°. Đường cao chia một cạnh kề với góc đó thành các phần 20cm và 21cm. Tính cạnh lớn trong hai cạnh còn lại (lưu ý có hai trường hợp hình 46 và hình 47).



Hình 46



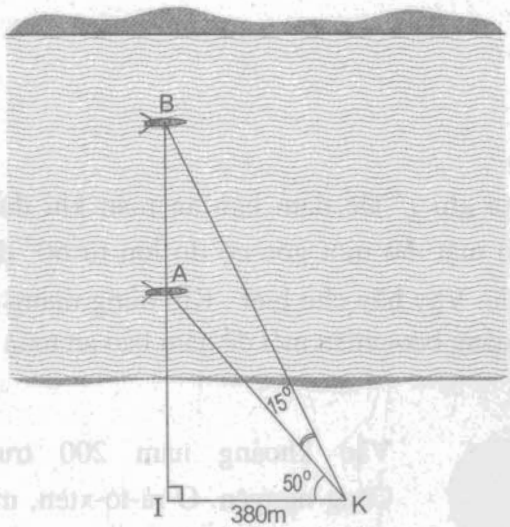
Hình 47

37. Cho tam giác ABC có AB = 6cm, AC = 4,5cm, BC = 7,5cm.

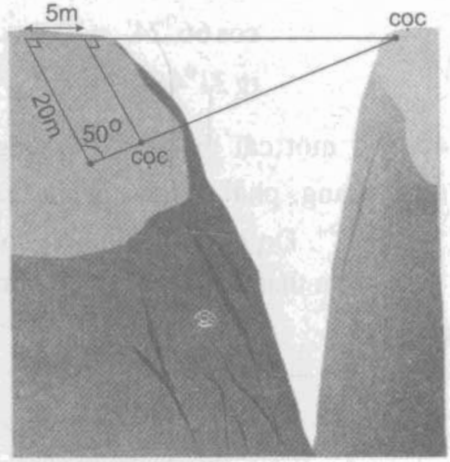
a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A. Tính các góc B, C và đường cao AH của tam giác đó.

b) Hỏi rằng điểm M mà diện tích tam giác MBC bằng diện tích tam giác ABC nằm trên đường nào ?

38. Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh hoạ như trong hình 48. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến mét).



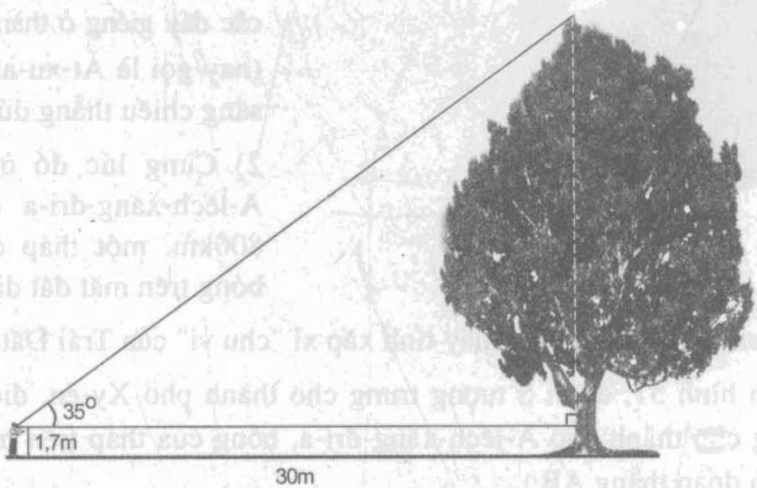
Hình 48



Hình 49

39. Tìm khoảng cách giữa hai cọc để căng dây vượt qua vực trong hình 49 (làm tròn đến mét).

40. Tính chiều cao của cây trong hình 50 (làm tròn đến đêximét).



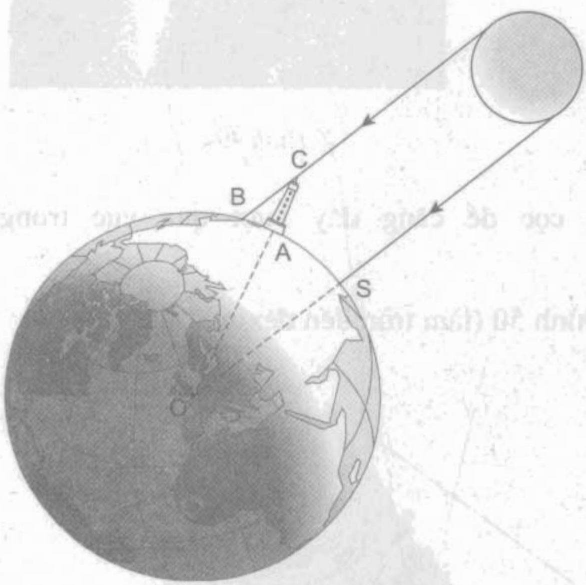
Hình 50

41. Tam giác ABC vuông tại C có AC = 2cm, BC = 5cm, $\widehat{BAC} = x$, $\widehat{ABC} = y$. Dùng các thông tin sau (nếu cần) để tìm $x - y$:

$$\sin 23^o36' \approx 0,4 ;$$
$$\cos 66^o24' \approx 0,4 ;$$
$$\text{tg}\, 21^o48' \approx 0,4.$$

42. Ở một cái thang dài 3m người ta ghi : "Để đảm bảo an toàn khi dùng thang, phải đặt thang này tạo với mặt đất một góc có độ lớn từ 60^o đến 70^o". Đo góc thì khó hơn đo độ dài. Vậy hãy cho biết : Khi dùng thang đó chân thang phải đặt cách tường khoảng bao nhiêu mét để đảm bảo an toàn ?

43. ***Đố***



Hình 51

Vào khoảng năm 200 trước Công nguyên, Ơ-ra-tô-xten, một nhà toán học và thiên văn học Hi Lạp, đã ước lượng được "chu vi" của Trái Đất (chu vi đường Xích Đạo) nhờ hai quan sát sau :

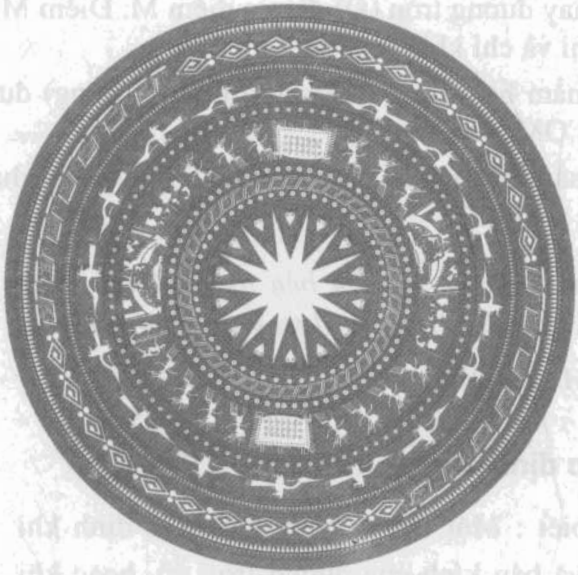
1) Một ngày trong năm, ông ta để ý thấy Mặt Trời chiếu thẳng các đáy giếng ở thành phố Xy-en (nay gọi là Át-xu-an), tức là tia sáng chiếu thẳng đứng.

2) Cùng lúc đó ở thành phố A-lếch-xăng-đri-a cách Xy-en 800km, một tháp cao 25m có bóng trên mặt đất dài 3,1m.

Từ hai quan sát trên, em hãy tính xấp xỉ "chu vi" của Trái Đất.

(Trên hình 51, điểm S tượng trưng cho thành phố Xy-en, điểm A tượng trưng cho thành phố A-lếch-xăng-đri-a, bóng của tháp trên mặt đất được coi là đoạn thẳng AB.)

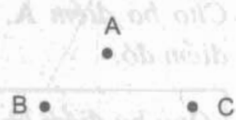
Chương II – **ĐƯỜNG TRÒN**



Mặt trống đồng (Văn hoá Đông Sơn).

§1. Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đặt mũi nhọn của compa ở vị trí nào thì vẽ được đường tròn đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng ?

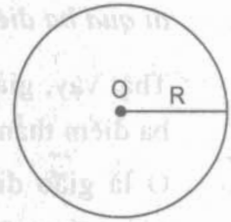


Trong chương này, ta chỉ xét các điểm nằm trên một mặt phẳng.

1. Nhắc lại về đường tròn

Ở lớp 6, ta đã biết :

Đường tròn tâm O bán kính R (với R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R (h.52).



Hình 52

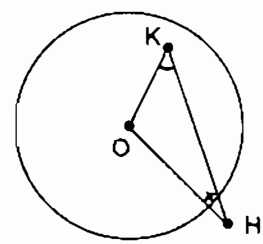
Đường tròn tâm O bán kính R được kí hiệu là (O ; R), ta cũng có thể kí hiệu là (O) khi không cần chú ý đến bán kính.

Khi điểm M thuộc đường tròn (O), ta còn nói : Điểm M nằm trên đường tròn (O) hay đường tròn (O) đi qua điểm M. Điểm M nằm trên đường tròn (O ; R) khi và chỉ khi OM = R.

Điểm M nằm bên trong (hay nằm trong, ở trong) đường tròn (O ; R) khi và chỉ khi OM < R.

Điểm M nằm bên ngoài (hay nằm ngoài, ở ngoài) đường tròn (O ; R) khi và chỉ khi OM > R.

?1 *Trên hình 53, điểm* H *nằm bên ngoài đường tròn* (O), *điểm* K *nằm bên trong đường tròn* (O). *Hãy so sánh* $\widehat{OKH}$ *và* $\widehat{OHK}$.



Hình 53

2. Cách xác định đường tròn

• Ta đã biết : Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của đường tròn đó, hoặc khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.

?2 *Cho hai điểm* A *và* B.

a) Hãy vẽ một đường tròn đi qua hai điểm đó.

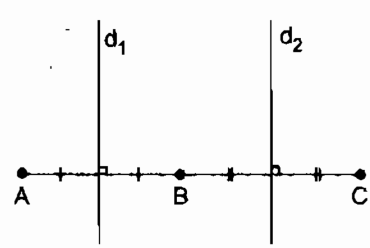
b) Có bao nhiêu đường tròn như vậy ? Tâm của chúng nằm trên đường nào ?

?3 *Cho ba điểm* A, B, C *không thẳng hàng. Hãy vẽ đường tròn đi qua ba điểm đó.*

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

➢ ***Chú ý.*** *Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.*

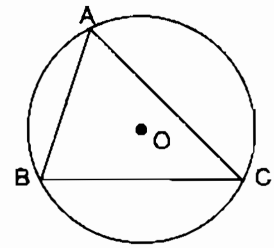
Thật vậy, giả sử có đường tròn (O) đi qua ba điểm thẳng hàng A, B, C (h.54) thì tâm O là giao điểm của đường trung trực d_1 của AB (vì OA = OB) và đường trung trực



Hình 54

d_2 của BC (vì OB = OC). Do $d_1 // d_2$ nên không tồn tại giao điểm của d_1 và d_2, mâu thuẫn.

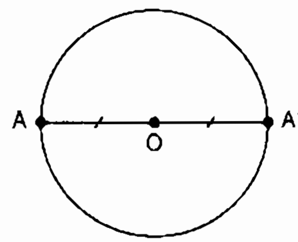
• Ở lớp 7, ta đã biết : Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC gọi là *đường tròn ngoại tiếp* tam giác ABC (h.55). Khi đó tam giác ABC gọi là *tam giác nội tiếp* đường tròn.



Hình 55

3. Tâm đối xứng

?4 *Cho đường tròn* (O), A *là một điểm bất kì thuộc đường tròn. Vẽ* A' *đối xứng với* A *qua điểm* O *(h.56). Chứng minh rằng điểm* A' *cũng thuộc đường tròn* (O).

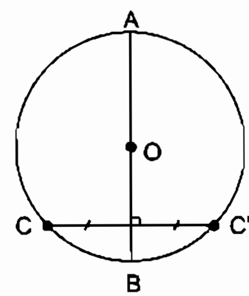


Hình 56

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

4. Trục đối xứng

?5 *Cho đường tròn* (O), AB *là một đường kính bất kì và* C *là một điểm thuộc đường tròn. Vẽ* C' *đối xứng với* C *qua* AB *(h.57). Chứng minh rằng điểm* C' *cũng thuộc đường tròn* (O).



Hình 57

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

Bài tập

1. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 12cm, BC = 5cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

2. Hãy nối mỗi ô ở cột trái với một ô ở cột phải để được khẳng định đúng :

(1) Nếu tam giác có ba góc nhọn	(4) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó nằm bên ngoài tam giác.
(2) Nếu tam giác có góc vuông	(5) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó nằm bên trong tam giác.
(3) Nếu tam giác có góc tù	(6) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh lớn nhất.
	(7) thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh nhỏ nhất.

3. Chứng minh các định lí sau :

a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy xác định vị trí của mỗi điểm A(−1 ; −1), B(−1 ; −2), C($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

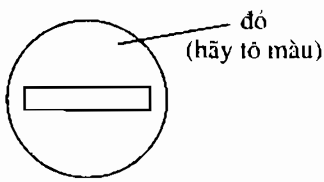
5. ***Đố.*** Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

Luyện tập

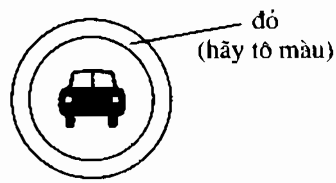
6. Trong các biển báo giao thông sau, biển nào có tâm đối xứng, biển nào có trục đối xứng ?

a) Biển cấm đi ngược chiều (h.58) ;

b) Biển cấm ôtô (h.59).



Hình 58



Hình 59

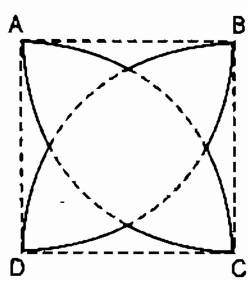
7. Hãy nối mỗi ô ở cột trái với một ô ở cột phải để được khẳng định đúng :

(1) Tập hợp các điểm có khoảng cách đến điểm A cố định bằng 2cm	(4) là đường tròn tâm A bán kính 2cm.
(2) Đường tròn tâm A bán kính 2cm gồm tất cả những điểm	(5) có khoảng cách đến điểm A nhỏ hơn hoặc bằng 2cm.
(3) Hình tròn tâm A bán kính 2cm gồm tất cả những điểm	(6) có khoảng cách đến điểm A bằng 2cm.
	(7) có khoảng cách đến điểm A lớn hơn 2cm.

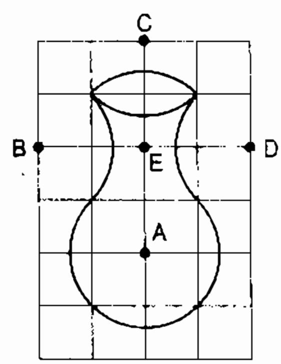
8. Cho góc nhọn xAy và hai điểm B, C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) đi qua B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

9. ***Đố***

a) *Vẽ hình hoa bốn cánh*. Hình hoa bốn cánh trên hình 60 được tạo bởi các cung có tâm A, B, C, D (trong đó A, B, C, D là các đỉnh của một hình vuông và tâm của cung là tâm của đường tròn chứa cung đó). Hãy vẽ lại hình 60 vào vở.



Hình 60

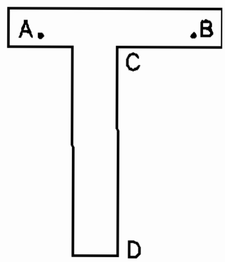


Hình 61

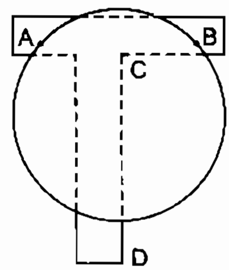
b) *Vẽ lọ hoa*. Chiếc lọ hoa trên hình 61 được vẽ trên giấy kẻ ô vuông bởi năm cung có tâm A, B, C, D, E. Hãy vẽ lại hình 61 vào giấy kẻ ô vuông.

Có thể em chưa biết

Hình 62 vẽ một dụng cụ tìm tâm đường tròn, đó là một tấm bìa cứng hình chữ T có hai đinh A, B và mép bìa CD là đường trung trực của AB.



Hình 62



Hình 63

Để tìm tâm của một nắp hộp tròn, ta đặt mép của nắp hộp chạm vào A và B rồi vạch theo CD ta được một đường thẳng đi qua tâm của nắp hộp (h.63). Xoay nắp hộp và làm tương tự, ta được một đường thẳng nữa đi qua tâm của nắp hộp. Giao điểm của hai đường thẳng vừa kẻ là tâm của nắp hộp.

§2. Đường kính và dây của đường tròn

> Trong các dây của đường tròn tâm O bán kính R, dây lớn nhất có độ dài bằng bao nhiêu ?

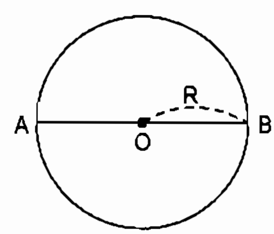
1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Bài toán. Gọi AB là một dây bất kì của đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng $AB \leq 2R$.

Giải

Trường hợp dây AB là đường kính (h.64) : Ta có

$$AB = 2R.$$

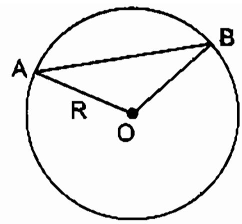


Hình 64

Trường hợp dây AB không là đường kính (h.65) :
Xét tam giác AOB, ta có

$$AB < AO + OB = R + R = 2R.$$

Vậy ta luôn có $AB \leq 2R$.



Hình 65

Kết quả của bài toán trên được phát biểu thành định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

> *Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.*

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

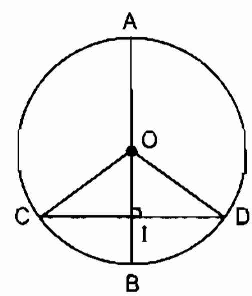
ĐỊNH LÍ 2

> *Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.*

Chứng minh. Xét đường tròn (O) có đường kính AB vuông góc với dây CD.

Trường hợp CD là đường kính : Hiển nhiên AB đi qua trung điểm O của CD.

Trường hợp CD không là đường kính (h.66) : Gọi I là giao điểm của AB và CD. Tam giác OCD có OC = OD (bán kính) nên nó là tam giác cân tại O, OI là đường cao nên cũng là đường trung tuyến, do đó IC = ID.



Hình 66

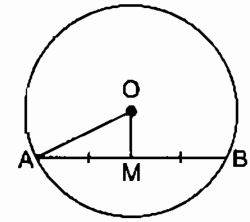
?1 *Hãy đưa ra một ví dụ để chứng tỏ rằng đường kính đi qua trung điểm của một dây có thể không vuông góc với dây ấy.*

Ta chứng minh được định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

> *Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.*

?2 *Cho hình 67. Hãy tính độ dài dây* AB, *biết* OA = 13cm, AM = MB, OM = 5cm.



Hình 67

Bài tập

10. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

b) DE < BC.

11. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng CH = DK.

Gợi ý. Kẻ OM vuông góc với CD.

§3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

> Biết khoảng cách từ tâm của đường tròn đến hai dây, có thể so sánh được độ dài của hai dây đó.

1. Bài toán

Cho AB *và* CD *là hai dây (khác đường kính) của đường tròn* (O ; R). *Gọi* OH, OK *theo thứ tự là các khoảng cách từ* O *đến* AB, CD. *Chứng minh rằng*

$$OH^2 + HB^2 = OK^2 + KD^2.$$

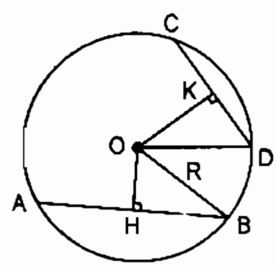
Giải (h.68)

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông OHB và OKD, ta có :

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 = R^2, \qquad (1)$$

$$OK^2 + KD^2 = OD^2 = R^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $OH^2 + HB^2 = OK^2 + KD^2$.



Hình 68

➢ ***Chú ý.*** *Kết luận của bài toán trên vẫn đúng nếu một dây là đường kính hoặc hai dây là đường kính.*

2. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

?1 *Hãy sử dụng kết quả của bài toán ở mục 1 để chứng minh rằng :*

a) Nếu AB = CD *thì* OH = OK.

b) Nếu OH = OK *thì* AB = CD.

Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

> *Trong một đường tròn :*
>
> *a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.*
>
> *b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.*

?2 *Hãy sử dụng kết quả của bài toán ở mục 1 để so sánh các độ dài:*

a) OH *và* OK, *nếu biết* AB > CD.

b) AB *và* CD, *nếu biết* OH < OK.

Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

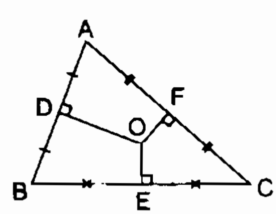
> *Trong hai dây của một đường tròn :*
>
> *a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.*
>
> *b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.*

?3 *Cho tam giác* ABC, O *là giao điểm của các đường trung trực của tam giác ;* D, E, F *theo thứ tự là trung điểm của các cạnh* AB, BC, AC. *Cho biết* OD > OE, OE = OF *(h.69).*

Hãy so sánh các độ dài :

a) BC *và* AC ;

b) AB *và* AC.



Hình 69

Bài tập

12. Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm, dây AB bằng 8cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho AI = 1cm. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh rằng CD = AB.

13. Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại điểm E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng :

a) EH = EK ;

b) EA = EC.

Luyện tập

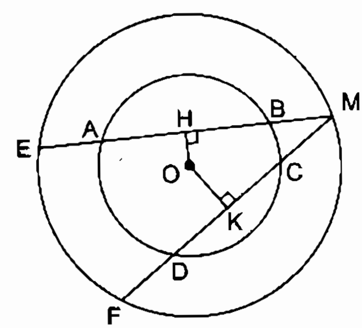
14. Cho đường tròn tâm O bán kính 25cm, dây AB bằng 40cm. Vẽ dây CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 22cm. Tính độ dài dây CD.

15. Cho hình 70 trong đó hai đường tròn cùng có tâm là O. Cho biết AB > CD. Hãy so sánh các độ dài :

a) OH và OK ;

b) ME và MF ;

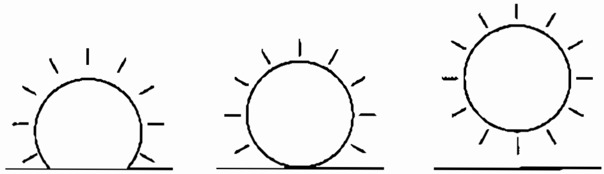
c) MH và MK.



Hình 70

16. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại A. Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA. Hãy so sánh độ dài hai dây BC và EF.

§4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn



Các vị trí của Mặt Trời so với đường chân trời cho ta hình ảnh ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

Xét đường tròn (O ; R) và đường thẳng a. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng a, khi đó OH là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a.

1. Ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

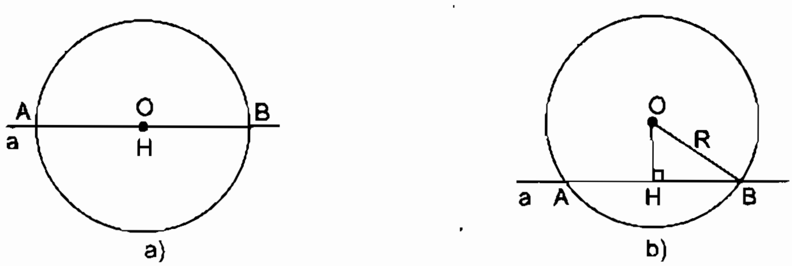
?1 *Vì sao một đường thẳng và một đường tròn không thể có nhiều hơn hai điểm chung ?*

Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và đường tròn mà ta có các vị trí tương đối của chúng.

a) Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi đường thẳng a và đường tròn (O) có hai điểm chung A và B (h.71), ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *cắt nhau*. Đường thẳng a còn gọi là *cát tuyến* của đường tròn (O).

Khi đó $OH < R$ và $HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}$.



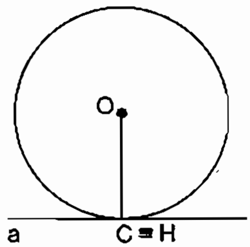
Hình 71

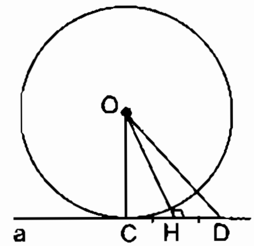
?2 *Hãy chứng minh khẳng định trên.*

b) Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

Khi đường thẳng a và đường tròn (O) chỉ có một điểm chung C, ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *tiếp xúc nhau*. Ta còn nói đường thẳng a là *tiếp tuyến* của đường tròn (O). Điểm C gọi là *tiếp điểm*.

Khi đó H trùng với C, OC ⊥ a và OH = R (h.72a).





Hình 72

Thật vậy, giả sử H không trùng với C, lấy điểm D thuộc đường thẳng a sao cho H là trung điểm của CD (h.72b). Khi đó C không trùng với D. Vì OH là đường trung trực của CD nên OC = OD. Ta lại có OC = R nên OD = R.

Như vậy, ngoài điểm C ta còn có điểm D cũng là điểm chung của đường thẳng a và đường tròn (O), điều này mâu thuẫn với giả thiết là đường thẳng a và đường tròn (O) chỉ có một điểm chung.

Vậy H phải trùng với C. Điều đó chứng tỏ rằng OC ⊥ a và OH = R.

Kết quả trên còn được phát biểu thành định lí sau đây.

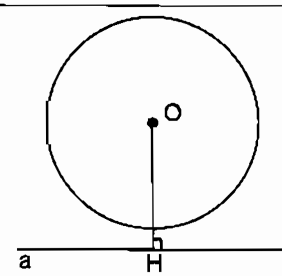
ĐỊNH LÍ

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

c) Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

Khi đường thẳng a và đường tròn (O) không có điểm chung (h.73), ta nói đường thẳng a và đường tròn (O) *không giao nhau*.

Ta chứng minh được rằng OH > R.



Hình 73

2. Hệ thức giữa khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính của đường tròn

Đặt OH = d, ta có các kết luận sau :

Nếu đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau thì $d < R$.

Nếu đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc nhau thì $d = R$.

Nếu đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau thì $d > R$.

Đảo lại, ta cũng chứng minh được :

Nếu $d < R$ thì đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau.

Nếu $d = R$ thì đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc nhau.

Nếu $d > R$ thì đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.

Ta có bảng tóm tắt sau :

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

?3 *Cho đường thẳng* a *và một điểm* O *cách* a *là* 3cm. *Vẽ đường tròn tâm* O *bán kính* 5cm.

a) Đường thẳng a *có vị trí như thế nào đối với đường tròn* (O) *? Vì sao ?*

b) Gọi B *và* C *là các giao điểm của đường thẳng* a *và đường tròn* (O). *Tính độ dài* BC.

Bài tập

17. Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng) :

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5cm	3cm	...
6cm	...	Tiếp xúc nhau
4cm	7cm	...

18. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(3 ; 4). Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn (A ; 3) và các trục toạ độ.

19. Cho đường thẳng xy. Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm và tiếp xúc với đường thẳng xy nằm trên đường nào ?

20. Cho đường tròn tâm O bán kính 6cm và một điểm A cách O là 10cm. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.

§5. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Làm thế nào để nhận biết một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn ?

1. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Ở §4, ta đã biết những dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn :

a) Nếu một đường thẳng và một đường tròn chỉ có một điểm chung thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

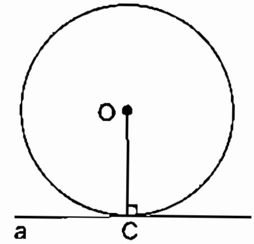
b) Nếu khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu nhận biết b) còn được phát biểu thành định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Trên hình 74, đường thẳng a đi qua điểm C của đường tròn (O) và vuông góc với bán kính OC nên đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O).

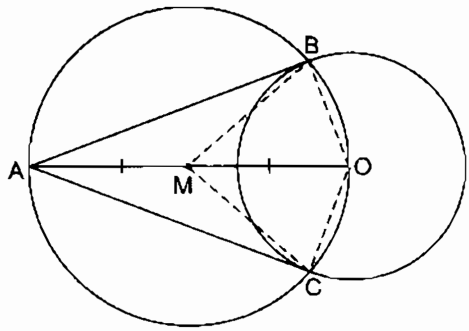


Hình 74

?1 *Cho tam giác* ABC, *đường cao* AH. *Chứng minh rằng đường thẳng* BC *là tiếp tuyến của đường tròn* (A ; AH).

2. Áp dụng

Bài toán. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn.



Hình 75

Cách dựng. (h.75)

Dựng M là trung điểm của AO.

Dựng đường tròn có tâm M bán kính MO, cắt đường tròn (O) tại B và C.

Kẻ các đường thẳng AB và AC. Ta được các tiếp tuyến cần dựng.

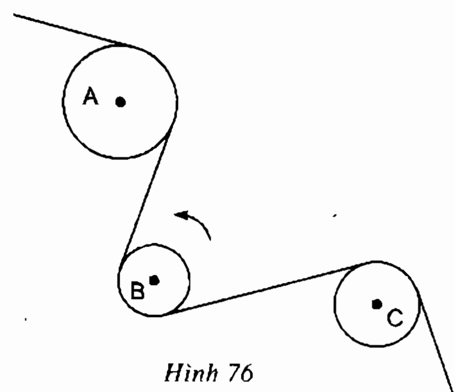
?2 *Hãy chứng minh cách dựng trên là đúng.*

Bài tập

21. Cho tam giác ABC có AB = 3, AC = 4, BC = 5. Vẽ đường tròn (B ; BA). Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

22. Cho đường thẳng d, điểm A nằm trên đường thẳng d, điểm B nằm ngoài đường thẳng d. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A.

23. ***Đố.*** Dây cua-roa trên hình 76 có những phần là tiếp tuyến của các đường tròn tâm A, B, C. Chiều quay của đường tròn tâm B ngược chiều quay của kim đồng hồ. Tìm chiều quay của đường tròn tâm A và đường tròn tâm C (cùng chiều quay hay ngược chiều quay của kim đồng hồ).



Hình 76

Luyện tập

24. Cho đường tròn (O), dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C.

a) Chứng minh rằng CB là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Cho bán kính của đường tròn bằng 15cm, AB = 24cm. Tính độ dài OC.

25. Cho đường tròn tâm O có bán kính OA = R, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác OCAB là hình gì ? Vì sao ?

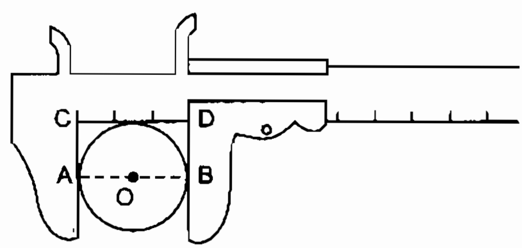
b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, nó cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Có thể em chưa biết

Thước đo đường kính hình tròn

Hình 77 là một thước cặp (pan-me) dùng để đo đường kính của một vật hình tròn.

Các đường thẳng AC, BD, CD tiếp xúc với đường tròn. Gọi O là tâm của đường tròn. Các góc ACD, CDB, OAC, OBD đều là góc vuông nên ba điểm A, O, B thẳng hàng. Độ dài CD cho ta đường kính của hình tròn.



Hình 77

Tính tầm nhìn xa tối đa

Một người quan sát đặt mắt ở vị trí A có độ cao cách mặt nước biển là AB = 5m. Tầm nhìn xa tối đa là đoạn thẳng AC (với C là tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ qua A, xem hình 78). Cho biết bán kính Trái Đất là OB = OC ≈ 6400km, ta tính được độ dài AC.

Cách 1. Theo định lí Py-ta-go :

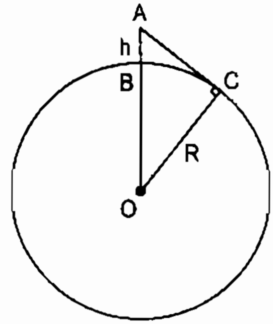
$$AC^2 = OA^2 - OC^2$$

$$\approx (6400{,}005)^2 - 6400^2$$

$$= 40960064{,}000025 - 40960000$$

$$= 64{,}000025$$

$$AC \approx 8 \text{ (km)}.$$



Hình 78

Cách 2. Đặt AB = h, OB = OC = R, ta có

$$AC^2 = OA^2 - OC^2 = (R+h)^2 - R^2$$
$$= R^2 + 2Rh + h^2 - R^2 = 2Rh + h^2.$$

Như vậy $AC^2 = 2Rh + h^2$.

Vì chiều cao h rất nhỏ so với bán kính R của Trái Đất nên $AC^2 \approx 2Rh$, do đó

$$AC \approx \sqrt{6400.2h} = 80\sqrt{2h}.$$

Với AB = 5m = 0,005km, ta có

$$AC \approx 80\sqrt{2.0,005} = 80\sqrt{0,01} = 80.0,1 = 8 \text{ (km)}.$$

➢ ***Chú ý.*** *Nếu vị trí quan sát có độ cao* h *(km) so với mặt nước biển thì tầm nhìn xa tối đa* d *(km) có thể tính bởi công thức gần đúng :*

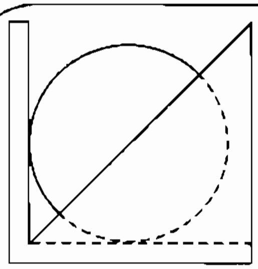
$$d \approx 80\sqrt{2h}.$$

Với h = 20m, *ta có* $d \approx 80\sqrt{2.0,02} = 80.0,2 = 16$ (km).

Với h = 80m, *ta có* $d \approx 80\sqrt{2.0,08} = 80.0,4 = 32$ (km).

Với h = 125m, *ta có* $d \approx 80\sqrt{2.0,125} = 80.0,5 = 40$ (km).

§6. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

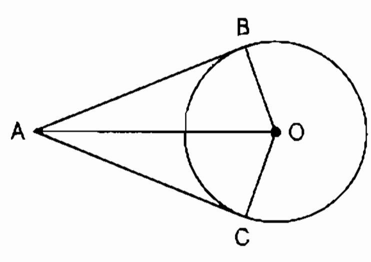


Với "thước phân giác", ta có thể tìm được tâm của một vật hình tròn.

1. Định lí về hai tiếp tuyến cắt nhau

?1 *Cho hình 79 trong đó* AB, AC *theo thứ tự là các tiếp tuyến tại* B, *tại* C *của đường tròn* (O). *Hãy kể tên một vài đoạn thẳng bằng nhau, một vài góc bằng nhau trong hình.*

Ta gọi góc tạo bởi hai tiếp tuyến AB và AC là góc BAC, góc tạo bởi hai bán kính OB và OC là góc BOC.



Hình 79

ĐỊNH LÍ

> *Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :*
>
> • *Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.*
>
> • *Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.*
>
> • *Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.*

Chứng minh. Gọi BA, CA theo thứ tự là các tiếp tuyến tại B, tại C của đường tròn (O) (h.79). Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $AB \perp OB$, $AC \perp OC$.

Hai tam giác vuông AOB và AOC có

$$OB = OC,$$

OA là cạnh chung

nên $\Delta AOB = \Delta AOC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông). Suy ra :

$AB = AC$.

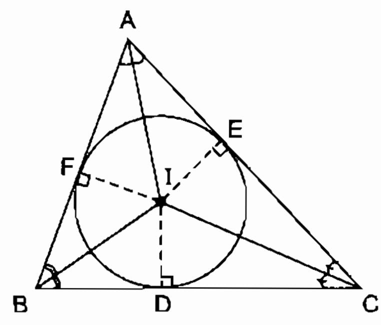
$\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$ nên AO là tia phân giác của góc BAC.

$\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ nên OA là tia phân giác của góc BOC.

?2 *Hãy nêu cách tìm tâm của một miếng gỗ hình tròn bằng "thước phân giác" (xem hình vẽ trong khung ở đầu §6).*

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

?3 *Cho tam giác* ABC. *Gọi* I *là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác* ; D, E, F *theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ* I *đến các cạnh* BC, AC, AB *(h.80). Chứng minh rằng ba điểm* D, E, F *nằm trên cùng một đường tròn tâm* I.



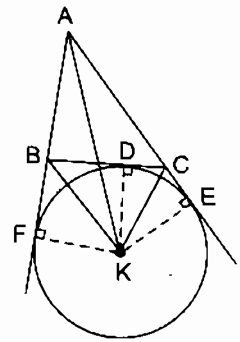
Hình 80

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.

Trên hình 80, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong của tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

?4 *Cho tam giác* ABC, K *là giao điểm các đường phân giác của hai góc ngoài tại* B *và* C ; D, E, F *theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ* K *đến các đường thẳng* BC, AC, AB (h.81). *Chứng minh rằng ba điểm* D, E, F *nằm trên cùng một đường tròn có tâm* K.



Hình 81

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác. Trên hình 81 ta có đường tròn (K) bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC.

Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác góc ngoài tại B (hoặc C). Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.

Bài tập

26. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng OA vuông góc với BC.

b) Vẽ đường kính CD. Chứng minh rằng BD song song với AO.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC ; biết OB = 2cm, OA = 4cm.

27. Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng chu vi tam giác ADE bằng 2AB.

28. Cho góc xAy khác góc bẹt. Tâm của các đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của góc xAy nằm trên đường nào ?

29. Cho góc xAy khác góc bẹt, điểm B thuộc tia Ax. Hãy dựng đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại B và tiếp xúc với Ay.

Luyện tập

30. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB (đường kính của một đường tròn chia đường tròn đó thành hai nửa đường tròn). Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Ax và By theo thứ tự ở C và D. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) CD = AC + BD.

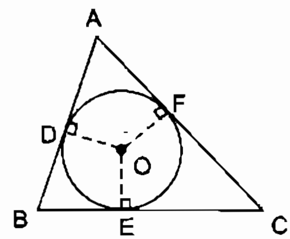
c) Tích AC.BD không đổi khi điểm M di chuyển trên nửa đường tròn.

31. Trên hình 82, tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng :

$$2AD = AB + AC - BC.$$

b) Tìm các hệ thức tương tự như hệ thức ở câu a).



Hình 82

32. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn bán kính 1cm. Diện tích của tam giác ABC bằng :

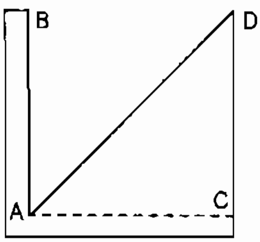
(A) 6cm^2 ; (B) $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$;

(C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$; (D) $3\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

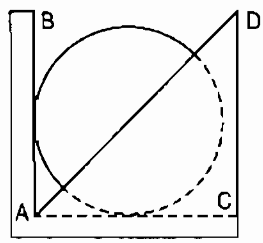
Hãy chọn câu trả lời đúng.

Có thể em chưa biết

Hình 83 minh hoạ "thước phân giác". Thước gồm hai thanh gỗ ghép lại thành góc vuông BAC, hai thanh gỗ này được đóng lên một tấm gỗ hình tam giác vuông, trong đó AD là tia phân giác của góc BAC.



Hình 83



Hình 84

Để tìm tâm của một hình tròn, ta đặt hình tròn đó tiếp xúc với hai cạnh AB và AC (h.84). Vạch theo AD ta được một đường thẳng đi qua tâm của hình tròn. Xoay hình tròn và làm tương tự, ta được một đường thẳng nữa đi qua tâm của hình tròn. Giao điểm của hai đường vừa kẻ là tâm của hình tròn.

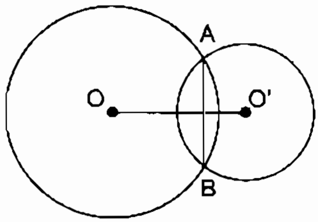
§7. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Hai đường tròn có thể có bao nhiêu điểm chung ?

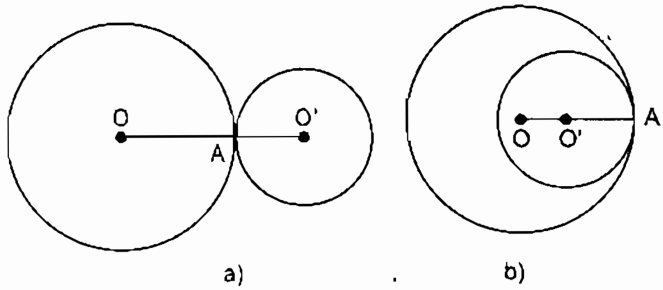
1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

?1 *Ta gọi hai đường tròn không trùng nhau là hai đường tròn phân biệt. Vì sao hai đường tròn phân biệt không thể có quá hai điểm chung ?*

• Hai đường tròn có hai điểm chung (h.85) được gọi là hai đường tròn *cắt nhau*. Hai điểm chung đó gọi là hai *giao điểm*. Đoạn thẳng nối hai điểm đó gọi là *dây chung*.



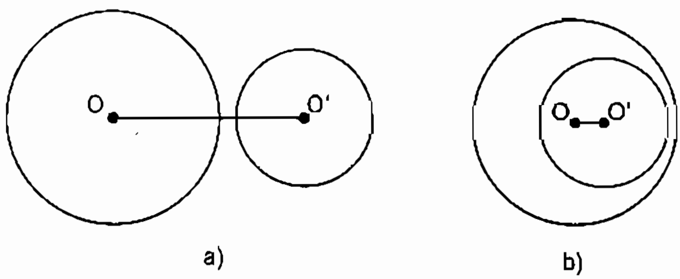
Hình 85



Hình 86

• Hai đường tròn chỉ có một điểm chung (h.86) được gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau*. Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*.

• Hai đường tròn không có điểm chung (h.87) được gọi là hai đường tròn *không giao nhau*.



Hình 87

2. Tính chất đường nối tâm

Cho hai đường tròn (O) và (O') có tâm không trùng nhau. Đường thẳng OO' gọi là *đường nối tâm*, đoạn thẳng OO' gọi là *đoạn nối tâm*.

Do đường kính là trục đối xứng của mỗi đường tròn nên đường nối tâm là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.

?2 *a) Quan sát hình 85, chứng minh rằng* OO' *là đường trung trực của* AB.

b) Quan sát hình 86, hãy dự đoán về vị trí của điểm A *đối với đường nối tâm* OO'.

Ta chứng minh được định lí sau đây.

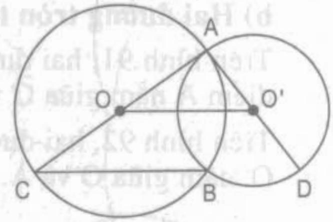
ĐỊNH LÍ

> *a) Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.*
>
> *b) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.*

?3 *Cho hình 88.*

a) Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn (O) *và* (O').

b) Chứng minh rằng BC // OO' *và ba điểm* C, B, D *thẳng hàng.*

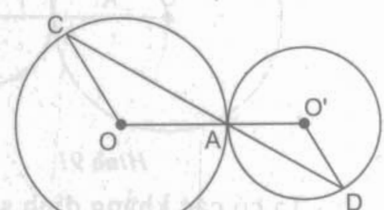


Hình 88

Bài tập

33. Trên hình 89, hai đường tròn tiếp xúc nhau tại A. Chứng minh rằng OC // O'D.

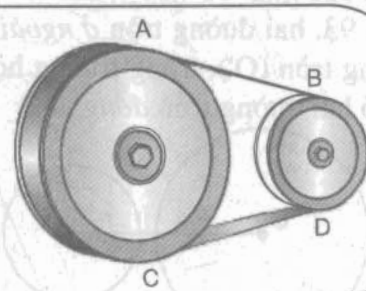
34. Cho hai đường tròn (O ; 20cm) và (O' ; 15cm) cắt nhau tại A và B. Tính đoạn nối tâm OO', biết rằng AB = 24cm. (Xét hai trường hợp : O và O' nằm khác phía đối với AB ; O và O' nằm cùng phía đối với AB).



Hình 89

§8. Vị trí tương đối của hai đường tròn (tiếp theo)

Các đoạn dây cua-roa AB, CD cho ta hình ảnh tiếp tuyến chung của hai đường tròn.



1. Hệ thức giữa đoạn nối tâm và các bán kính

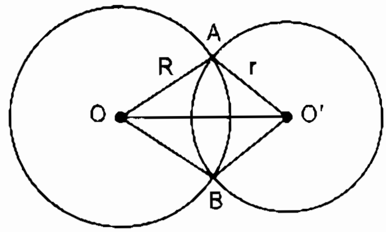
Trong mục này ta xét hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) trong đó $R \geq r$.

a) Hai đường tròn cắt nhau

Trên hình 90, hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B.

Ta có khẳng định sau :

Nếu hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau thì R – r < OO' < R + r.



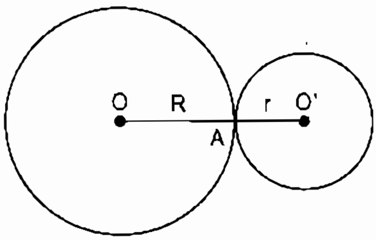
Hình 90

?1 *Hãy chứng minh khẳng định trên.*

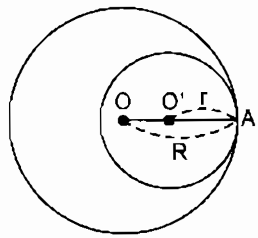
b) Hai đường tròn tiếp xúc nhau

Trên hình 91, hai đường tròn (O) và (O') *tiếp xúc ngoài* tại A, khi đó tiếp điểm A nằm giữa O và O'.

Trên hình 92, hai đường tròn (O) và (O') *tiếp xúc trong* tại A, khi đó điểm O' nằm giữa O và A.



Hình 91



Hình 92

Ta có các khẳng định sau :

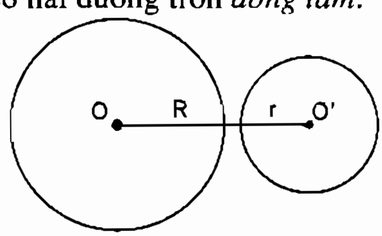
Nếu hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài thì OO' = R + r.

Nếu hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong thì OO' = R – r.

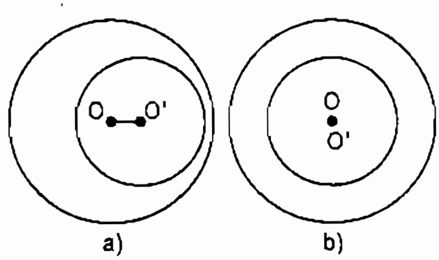
?2 *Hãy chứng minh các khẳng định trên.*

c) Hai đường tròn khong giao nhau

Trên các hình 93 và 94, hai đường tròn (O) và (O') không giao nhau. Trên hình 93, hai đường tròn *ở ngoài nhau.* Trên hình 94, đường tròn (O) *đựng* đường tròn (O'), trong trường hợp đặc biệt khi hai tâm trùng nhau (h.94b) ta có hai đường tròn *đồng tâm.*



Hình 93



Hình 94

Ta chứng minh được các khẳng định sau :

Nếu hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau thì $OO' > R + r$.

Nếu đường tròn (O) đựng đường tròn (O') thì $OO' < R - r$.

• Ta cũng chứng minh được điều đảo lại của các khẳng định ở các mục a, b, c nói trên.

Ta có bảng sau :

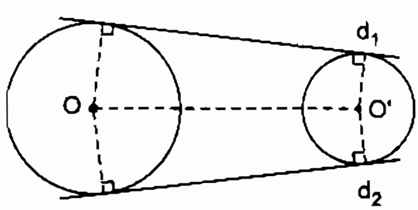
Vị trí tương đối của hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) ($R \geq r$)	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau : – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	 $OO' = R + r$ $OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau : – (O) và (O') ở ngoài nhau – (O) đựng (O')	0	 $OO' > R + r$ $OO' < R - r$

2. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

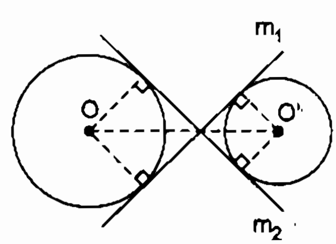
Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Trên hình 95, các đường thẳng d_1 và d_2 là các *tiếp tuyến chung ngoài* của hai đường tròn (O) và (O') (tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn nối tâm).

Trên hình 96, các đường thẳng m_1 và m_2 là các *tiếp tuyến chung trong* của hai đường tròn (O) và (O') (tiếp tuyến chung trong cắt đoạn nối tâm).

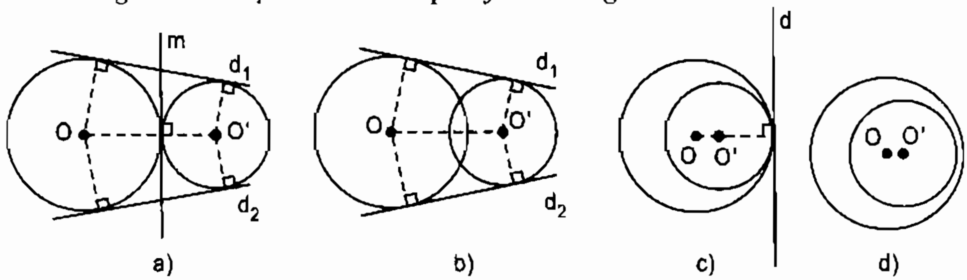


Hình 95



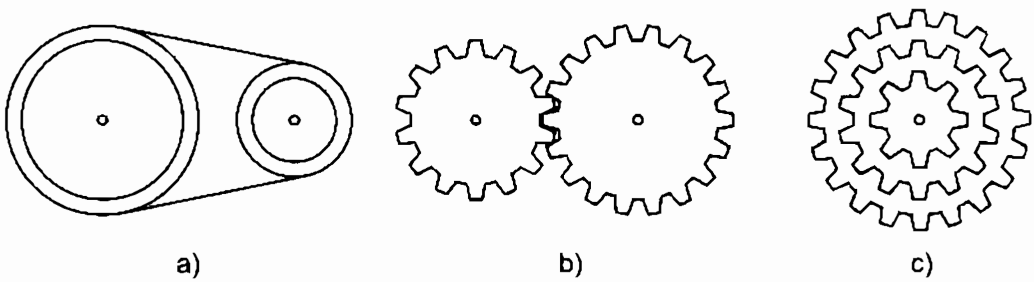
Hình 96

?3 *Quan sát các hình 97a, b, c, d, trên hình nào có vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn ? Đọc tên các tiếp tuyến chung đó.*



Hình 97

Trong thực tế, ta thường gặp những đồ vật có hình dạng và kết cấu liên quan đến những vị trí tương đối của hai đường tròn : bánh xe và dây cua-roa (h.98a), hai bánh răng khớp nhau (h.98b), líp nhiều tầng của xe đạp (h.98c).



Hình 98

Bài tập

35. Điền vào các ô trống trong bảng, biết rằng hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) có OO' = d, R > r.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d, R, r
(O ; R) đựng (O' ; r)		
		d > R + r
Tiếp xúc ngoài		
		d = R − r
	2	

36. Cho đường tròn tâm O bán kính OA và đường tròn đường kính OA.

a) Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C. Chứng minh rằng AC = CD.

37. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Dây AB của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C và D. Chứng minh rằng AC = BD.

Luyện tập

38. Điền các từ thích hợp vào chỗ trống (...) :

a) Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc ngoài với đường tròn (O ; 3cm) nằm trên ...

b) Tâm của các đường tròn có bán kính 1cm tiếp xúc trong với đường tròn (O ; 3cm) nằm trên ...

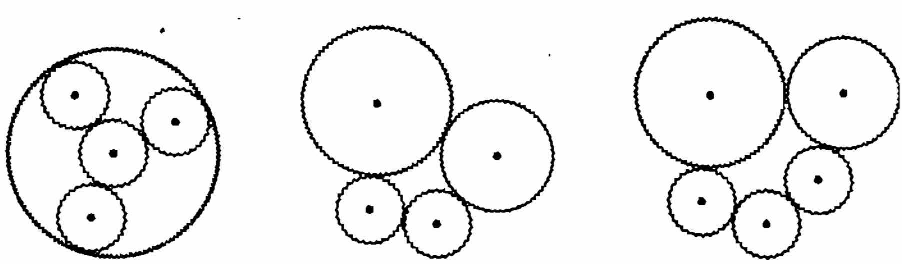
39. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

b) Tính số đo góc OIO'.

c) Tính độ dài BC, biết OA = 9cm, O'A = 4cm.

40. ***Đố.*** Trên các hình 99a, 99b, 99c, các bánh xe tròn có răng cưa được khớp với nhau. Trên hình nào hệ thống bánh răng chuyển động được ? Trên hình nào hệ thống bánh răng không chuyển động được ?



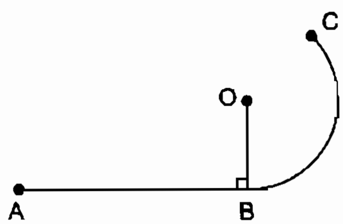
a) b) c)

Hình 99

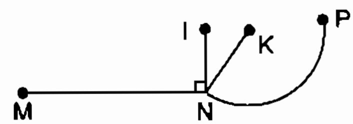
Có thể em chưa biết

Vẽ chắp nối trơn

Trên hình 100, ta có đoạn thẳng AB và cung BC của đường tròn tâm O, đoạn thẳng AB tiếp xúc với cung BC (vì AB ⊥ BO). Tại B, đường đi ABC "trơn" chứ không "gãy" (còn trên hình 101 : đoạn thẳng MN không tiếp xúc với cung NP, đường đi MNP bị "gãy" tại N). Ta nói đoạn thẳng AB được *vẽ chắp nối trơn* với cung BC.

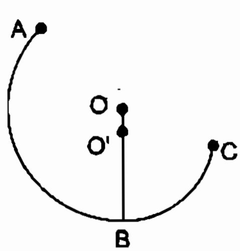


Hình 100

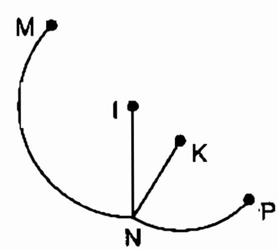


Hình 101

Trên hình 102, cung AB của đường tròn tâm O tiếp xúc với cung BC của đường tròn tâm O' (vì các tiếp tuyến tại B của các đường tròn đó trùng nhau, khi đó ba điểm O, O', B thẳng hàng). Tại B, đường đi ABC cũng "trơn" chứ không "gãy" (còn trên hình 103 : cung MN không tiếp xúc với cung NP, đường đi MNP bị "gãy" tại N). Ta nói cung AB được *vẽ chắp nối trơn* với cung BC.

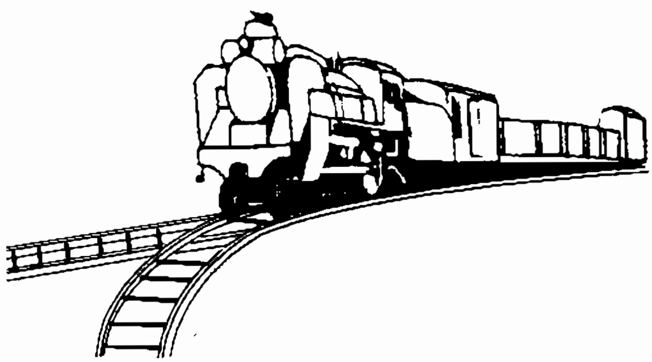


Hình 102



Hình 103

Trong kĩ thuật, nhiều khi ta phải vẽ chắp nối trơn một cung với một đoạn thẳng hoặc vẽ chắp nối trơn hai cung với nhau. Các thanh đường ray xe lửa được chắp nối trơn với nhau khi xe lửa đổi hướng từ đường thẳng sang đường cong (h.100) hoặc từ đường cong này sang đường cong khác (h.102).

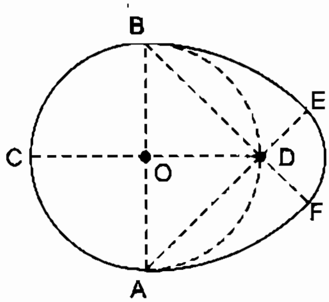


Đường ray xe lửa, hình ảnh đường thẳng được chắp nối trơn với đường cong.

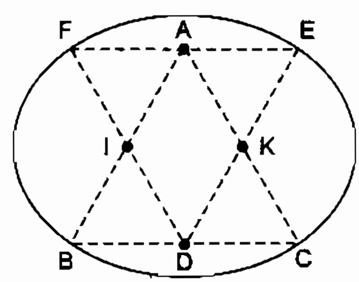
Em hãy tập vẽ chắp nối trơn để được các hình sau :

a) *Hình "quả trứng".*

Hình "quả trứng" (h.104) được tạo bởi bốn cung vẽ chắp nối trơn : nửa đường tròn ACB có đường kính AB, cung BE có tâm A, cung EF có tâm D, cung FA có tâm B (tâm của cung là tâm của đường tròn chứa cung đó).



Hình 104



Hình 105

b) *Hình "trái xoan".*

Hình "trái xoan" (h.105) được tạo bởi bốn cung vẽ chắp nối trơn : cung BC có tâm A, cung CE có tâm K, cung EF có tâm D, cung FB có tâm I (các tam giác ABC và DEF là các tam giác đều ; D, I, K là trung điểm các cạnh của tam giác ABC).

Ôn tập chương II

Câu hỏi

1. Thế nào là đường tròn ngoại tiếp một tam giác ? Nêu cách xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

2. Thế nào là đường tròn nội tiếp một tam giác ? Nêu cách xác định tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

3. Chỉ rõ tâm đối xứng của đường tròn, trục đối xứng của đường tròn.

4. Chứng minh định lí : Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

5. Phát biểu các định lí về quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.

6. Phát biểu các định lí về liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.

7. Nêu các vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Ứng với mỗi vị trí đó, viết hệ thức giữa d (khoảng cách từ tâm đến đường thẳng) và R (bán kính của đường tròn).

8. Phát biểu định nghĩa tiếp tuyến của đường tròn. Phát biểu tính chất của tiếp tuyến và dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến. Phát biểu các tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

9. Nêu các vị trí tương đối của hai đường tròn. Ứng với mỗi vị trí đó, viết hệ thức giữa đoạn nối tâm d với các bán kính R, r.

10. Tiếp điểm của hai đường tròn tiếp xúc nhau có vị trí như thế nào đối với đường nối tâm ? Các giao điểm của hai đường tròn cắt nhau có vị trí như thế nào đối với đường nối tâm ?

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

2. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

CÁC ĐỊNH LÍ

1. a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

   b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

2. a) Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

   b) Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

3. Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

4. Trong một đường tròn :

   a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

   b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

5. Trong một đường tròn :

   a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm, hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

   b) Dây lớn hơn thì gần tâm hơn, dây gần tâm hơn thì lớn hơn.

6. a) Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

   b) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

7. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

   a) Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

   b) Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

   c) Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

8. Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

Bài tập

41. Cho đường tròn (O) có đường kính BC, dây AD vuông góc với BC tại H.

Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

a) Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn : (I) và (O), (K) và (O), (I) và (K).

b) Tứ giác AEHF là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh đẳng thức AE.AB = AF.AC.

d) Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

e) Xác định vị trí của điểm H để EF có độ dài lớn nhất.

42. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A, BC là tiếp tuyến chung ngoài, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt BC ở điểm M. Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của O'M và AC. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác AEMF là hình chữ nhật.

b) ME.MO = MF.MO'.

c) OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là BC.

d) BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là OO'.

43. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) cắt nhau tại A và B (R > r). Gọi I là trung điểm của OO'. Kẻ đường thẳng vuông góc với IA tại A, đường thẳng này cắt các đường tròn (O ; R) và (O' ; r) theo thứ tự tại C và D (khác A).

a) Chứng minh rằng AC = AD.

b) Gọi K là điểm đối xứng với điểm A qua điểm I. Chứng minh rằng KB vuông góc với AB.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Trang

Chương I. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Chương II. ĐƯỜNG TRÒN

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

LONDON
QUALITY
CROWN
QC 100

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 9

1. Ngữ văn 9 (tập một, tập hai)
2. Lịch sử 9
3. Địa lí 9
4. Giáo dục công dân 9
5. Âm nhạc và Mĩ thuật 9
6. Toán 9 (tập một, tập hai)
7. Vật lí 9
8. Hoá học 9
9. Sinh học 9
10. Công nghệ
    - Nấu ăn
    - Trồng cây
    - Cắt may
    - Lắp đặt mạng điện trong nhà
    - Sửa chữa xe đạp
11. Tiếng nước ngoài :
    - Tiếng Anh 9
    - Tiếng Nga 9
    - Tiếng Pháp 9
    - Tiếng Trung Quốc 9

ISBN 978-604-0-00116-0
8 934994 024372

Giá : 6.500đ